Задания группы С1

Задания типа С1 требуют умения решать системы тригонометрических, логарифмических, степенных, показательных, иррациональных уравнений.

В большинстве систем в одном из уравнений или сразу или после относительно несложного преобразования остается одно неизвестное. Уравнение решается относительно этого неизвестного и найденные значения подставляются в другое уравнение.

1. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sin x = y-3,\\ \cos x = y-2.\end{cases}$

Решение. $\begin{cases}\sin x = \cos x - 1,\\ \cos x = y-2,\end{cases}$ $\begin{cases}(\sin x - \cos x)^2 = 1,\\ \cos x = y-2,\end{cases}$ $\begin{cases}1-2\sin x\cos x = 1,\\ \cos x = y-2,\end{cases}$ $\begin{cases}\sin x\cos x = 0,\\ \cos x = y-2,\end{cases}$

$\begin{cases}\sin x = 0,\\ \cos x = 1,\\ 1 = y-2\end{cases}$ *или* $\begin{cases}\cos x = 0,\\ \sin x = -1,\\ 0 = y-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x = 2\pi n,\\ y = 3\end{cases}$ *или* $\begin{cases}x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\\ y = 2,\end{cases}$ где n – любое целое число.

Ответ: $(2\pi n;3)$, $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2)$, где n – любое целое число.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases}2^y + 2\sin x = 0,\\ tgx + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}.\end{cases}$

Решение. Решим сначала второе уравнение системы.

$\mathrm{tg}x + 1 = \mathrm{tg}^2 x + 1,\ \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}x = 0,\ \mathrm{tg}x = 0$ или $\mathrm{tg}x = 1,\ x_1 = \pi n$ или $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n.$ А теперь вернемся к решению системы.

1) $\begin{cases}x = \pi n,\\ 2^y + 2\sin \pi n = 0\end{cases}$, $\begin{cases}x = \pi n,\\ 2^y = 0\end{cases}$ – нет решений

2) $\begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\\ 2^y + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right) = 0\end{cases}$, $\begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\\ 2^y \pm \sqrt{2} = 0\end{cases}$, $\begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4} + \pi(2n+1),\\ 2^y = \sqrt{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x = \dfrac{\pi}{4} + \pi(2n+1),\\ y = \dfrac{1}{2},\end{cases}$ где n – любое целое число.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi(2n+1); \frac{1}{2}\right)$, где n – любое целое число.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 81^{\sin y} - 30\cdot 9^{\sin y} + 81 = 0, \\ \sqrt{x} + 2\cos y = 0. \end{cases}$

Решение. Будем решать систему по следующему плану. Сначала из первого уравнения найдем у. Первое уравнение квадратное относительно $9^{\sin y}$. Заметим, что у нужно брать таким, чтобы cos у во втором уравнении системы оказался отрицательным.

Ответ. $\left(3; \frac{5}{6}\pi + 2\pi n\right)$, где n –любое целое число.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\sin x = \cos 2x + 1, \\ \sqrt{y^2 + 6y} + 6\cos x = 0. \end{cases}$

Решение. В первом уравнении заменим cos2x на $1–2\sin^2 x$ и приведём к квадратному уравнению относительно sin$x$. Второе уравнение системы требует, чтобы cos$x$ был меньше или равен нулю – это нужно будет учитывать, выражая x из первого уравнения системы.

Ответ: $\left(\frac{5}{6}\pi + 2\pi n; -9\right), \left(\frac{5}{6}\pi + 2\pi n; 3\right)$, где n – любое целое число.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 4xy + 4y^2 - 16} = x - 2y, \\ y^2 - 2xy + 16 = 0. \end{cases}$

Решение. После возведения в квадрат первого уравнения системы оно станет уравнением относительно x (следует записать и не забыть потом проверить, что $x–2y\geq 0$).

Ответ: (–4; –4)

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 \cdot \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения системы или $x^5=0$, или выражение под знаком корня равно нулю. Если $x^5=0$, то $x=0$ и под знаком корня остается выражение $–4y^2$. Чтобы корень имел смысл должно быть $y=0$. Но тогда становится неверным первое равенство системы: 0=2. Значит, $x\neq 0$.

Если выражение под корнем обращается в нуль, имеем $x^2–4y^2=0$, x=2у или x=–2у.

Подставим эти выражения x в первое равенство системы.

Получим $2y–y=2$ или $–2y–y=2$,

$y=2$ или $y=–2/3$. Соответствующие значения x – это 4 и $\frac{4}{3}$.

Ответ: (4; 2), $\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Задания для самостоятельного решения

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin y = x - 6, \\ \cos y = x - 7. \end{cases}$

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\sin^2 y + 3\sin y - 2 = 0, \\ \sqrt{x^2 - x} + 4\cos y = 0; \end{cases}$

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^y - 2\sin x = 0, \\ \mathrm{tg}x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}; \end{cases}$

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y + \sqrt{4x^2 - y^2} = 2, \\ x^3 \cdot \sqrt{4x^2 - y^2} = 0. \end{cases}$

Ответы

7. Ответ: (6; $\pi + 2\pi n$), $\left(7; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, где n – любое целое число.

8. Ответ: $\left(-3; \dfrac{5}{6}\pi + 2\pi n\right), \left(4; \dfrac{5}{6}\pi + 2\pi n\right)$, где n – любое целое число.

9. Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n; 0,5\right)$.

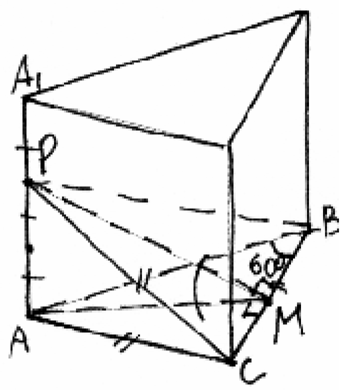
10. Ответ: $(-2; -4), \left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{4}{3}\right)$.

Задания группы С2

Задание типа С2 – это стереометрическая задача, в которой нужно найти длину отрезка, площадь, угол (между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями), связанные с призмой, пирамидой, цилиндром, конусом или шаром. Иногда при решении задач требуются дополнительные построения.

1. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник, в котором $AB=AC=8$, а один из углов равен 60°. На ребре AA_1 отмечена точка P так, что $AP:PA_1=2:1$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP, если расстояние между прямыми AB и C_1B_1 равно $18\sqrt{3}$.

Решение. Сделаем рисунок. Из условия следует, что:



1) в основании призмы равносторонний треугольник, так как у равнобедренного треугольника есть угол в 60°;

2) прямые AB и C_1B_1 лежат в параллельных плоскостях оснований, а значит, расстояние между этими прямыми равно расстоянию между основаниями, т.е. длине бокового ребра призмы;

3) перпендикуляры из точек P и A к прямой CB проходят через точку M – середину ребра CB;

4) тангенс угла PMA – линейного угла двугранного угла $PBCA$ – равен отношению AP к AM.

$$\frac{AP}{AM}=\frac{\frac{2}{3}AA_1}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 18\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8}=3.$$ Ответ: 3.

2. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=BC=20$, $AC=32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1, причем $BP:PB_1=1:3$. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

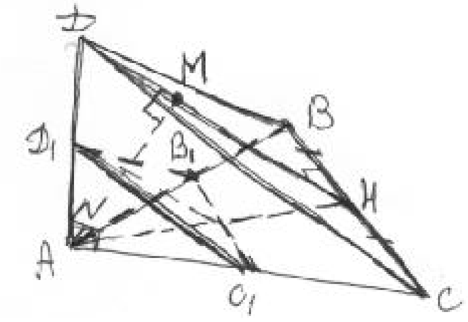
Решение. При разборе решения сделайте по условию задачи рисунок и отмечайте на нем упомянутые в решении элементы конфигурации.

Искомый угол равен двугранному углу между плоскостями ABC и APC, который в свою очередь измеряется линейным углом между высотами одноименных равнобедренных треугольников, проведенных к их общему основанию AC в точку E. Высота BE равна 12 как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой 20 и катетом 16 (половина AC). $BP=BB_1:4=6$. Искомый тангенс равен отношению BP к BE. Получаем 6:12=0,5.

Ответ: 0,5.

3. Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AD, если $AD=2\sqrt{5}, AB=AC=10,\ BC=4\sqrt{5}.$

Решение.



Пирамиды $D_1AB_1C_1$ и $DABC$ подобны с коэффициентом 2, а плоскости DBC и $D_1B_1C_1$ параллельны (средние линии в соответствующих треугольниках). Искомое расстояние в 2 раза меньше высоты AM пирамиды $DABC$, проведенной из вершины A к плоскости DBC. Основание M этой высоты лежит на высоте DH равнобедренного треугольника BDC.

AM – высота треугольника AHD, угол H которого является линейным углом двугранного угла $ABCD$. В силу равнобедренности треугольников с основанием BC точка H – середина BC. Из прямоугольных треугольников AHC и DHC

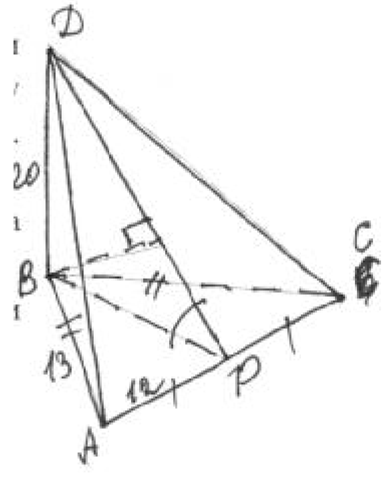
$$AH^2=10^2-(2\sqrt{5})^2=80,\ DH^2=(2\sqrt{5})^2+80=100.$$

$AM\cdot DH=AH\cdot AD,\ AM=\dfrac{\sqrt{80}\cdot 2\sqrt{5}}{10}=4.$ Искомое расстояние равно 4:2=2

Ответ: 2.

4, Основание пирамиды $DABC$ – равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=BC=13$, $AC=24$. Ребро BD перпендикулярно грани ABC и равно 20. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC.

Решение.



1) AC является общим ребром граней ACD и ACB, и основанием этих равнобедренных треугольников. Искомый угол равен углу между высотами этих треугольников, проведенных из вершин D и B. Основания высот совпадают с серединой AC – точкой P.

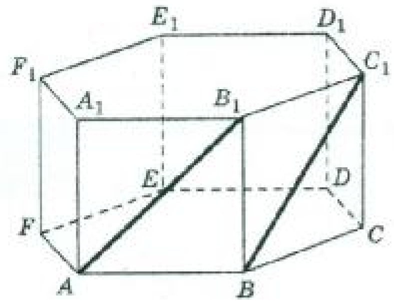
2) BP равно 5 как меньший катет прямоугольного треугольника с гипотенузой 13 и большим катетом 12 (половина AC).

3) Из прямоугольного треугольника DBP находим $\operatorname{tg}\angle DPB=\dfrac{20}{5}=4$.

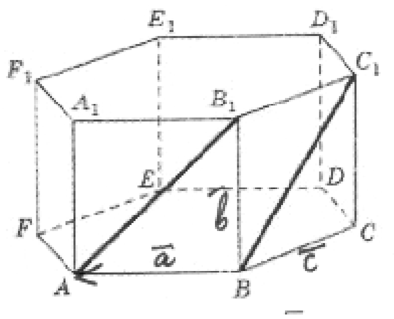
Ответ: 4.

В заданиях с правильной шестиугольной призмой полезно помнить, что сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности, и что диагонали, соединяющие его противоположные вершины являются диаметрами этой окружности.

5. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.



Решение. Векторы AB_1 и BC_1 легко выражаются через векторы $BA=a$, $BB_1=b$ и $BC=c$ длины которых и углы между которыми легко указать.



$AB_1= \ -a+b, \ \ BC_1= \ b+c$. Искомый угол находим из формулы скалярного произведения $\bar{a}\bar{b} = ab\cos\alpha$.

$$(b-a)(b+c)=-ab+b^2-ac+bc=$$

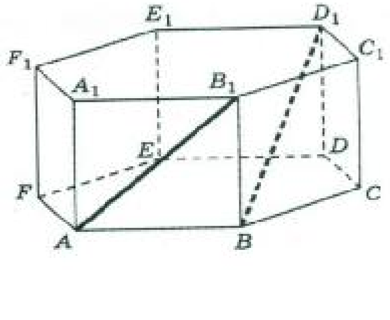
$$=-1\cdot 1\cdot\cos 90°+1-1\cdot 1\cdot\cos 120°+1\cdot 1\cdot\cos 90°=0+1+\frac{1}{2}+0=\frac{3}{2}.$$

Длины векторов AB_1 и BC_1 как диагонали квадратов со сторонами 1 равны $\sqrt{2}$ каждая. Получаем $\cos\alpha=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}$.

Угол между прямыми – острый, его косинус равен 0,75.

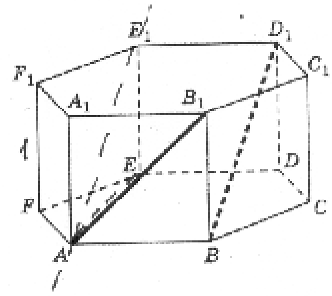
Ответ: 0,75.

6. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$,, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1.



Решение.

1) Угол между указанными прямыми равен углу между прямой AB_1 и прямой, проходящей через точку A параллельно BD_1.



2) $AE_1 \| BD_1$. $AE_1 = \sqrt{AE^2 + EE_1^2}$,

$$AE^2 = AF^2 + FE^2 - 2AE \cdot FE \cos\angle AFE = 1+1+1=3.$$

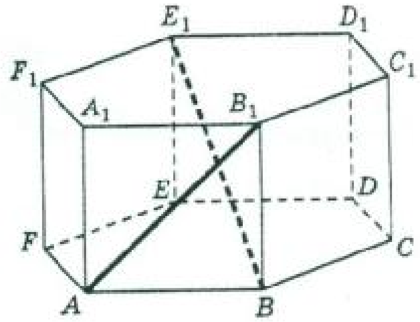
$$AE_1 = \sqrt{AE^2 + EE_1^2} = \sqrt{3+1} = 2;$$

3) В правильном шестиугольнике $B_1E_1=2A_1B_1=2$. Из треугольника B_1AE_1, где угол E_1AB_1 – острый, имеем

$$\cos\angle E_1AB_1 = \left|\frac{B_1E_1^2 - AE_1^2 - B_1A^2}{2AE_1 \cdot AB_1}\right| = \left|\frac{4-4-2}{2\cdot 2\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

7. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми AB_1 и BE_1.

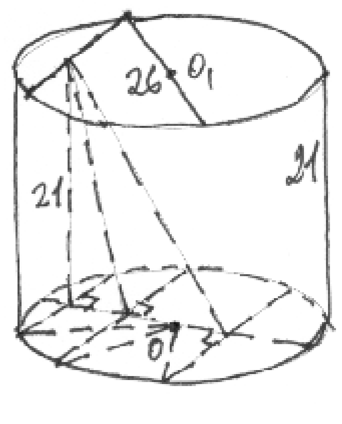


Решение. Векторы AB_1 и BB_1 легко выражаются через векторы BA, BB_1 и B_1E_1, длины которых и углы между которыми легко указать.

$AB_1= -BA+BB_1$, $BE_1=BB_1+B_1E_1$. Искомый угол находим из формулы скалярного произведения $\bar{a}\bar{b} = ab\cos\alpha$. В нашем случае оно равно нулю, значит угол равен 90°.

Ответ: 90°.

8. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.



Решение. Рассмотрите два случая.

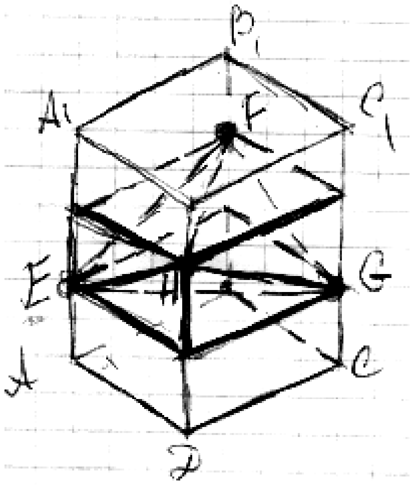
Расстояние от центров окружностей до соответствующих хорд равны соответственно

$$\sqrt{\left(\frac{26}{2}\right)^2 - \left(\frac{24}{2}\right)^2} = 5 \text{ и } \sqrt{\left(\frac{26}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2} = 12.$$

Хорды параллельны, поэтому расстояние между одной из них и проекцией другой может быть либо 17, либо 7. Из чертежа видно, что тангенс искомого угла $\frac{21}{7}$ или $\frac{21}{17}$.

Ответ: 3 или $\frac{21}{17}$.

9. На ребрах AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки E, F, G и H соответственно так, что $AE=B_1F=CG=D_1H=\frac{1}{3}$. Найдите объем пирамиды $EFGH$.

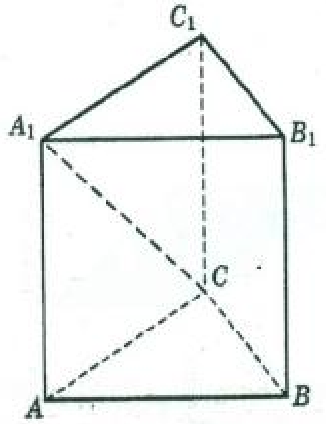


Решение. Искомая пирамида целиком «вписана» в прямую призму с основаниями, равными основаниям куба, и высотой, равной трети его высоты. «Лишние» части призмы представляют собой 4 равные треугольные пирамиды с основаниями, равными половинам оснований призмы и высотами, равными высоте призмы, равной трети ребра данного куба. Искомый объем найдем как разность объема призмы и суммарного объема четырех пирамид:

$\frac{1}{3}\cdot 1-4\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$. Ответ: $\frac{1}{9}$

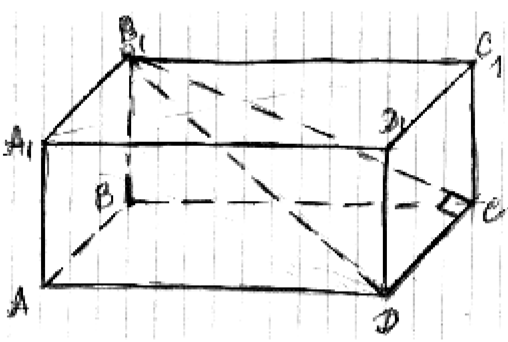
Задачи для самостоятельного решения

10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и A_1C.

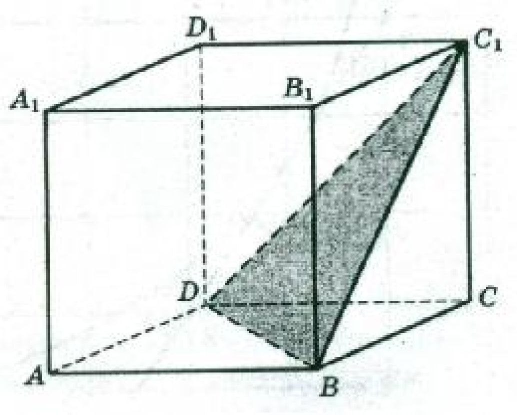


11 **Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1и BD равно $\sqrt{3}$.**

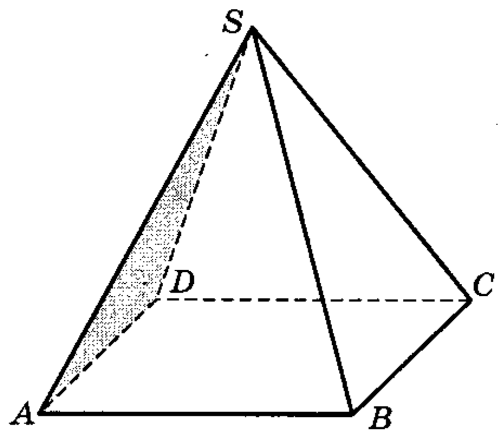
12. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.



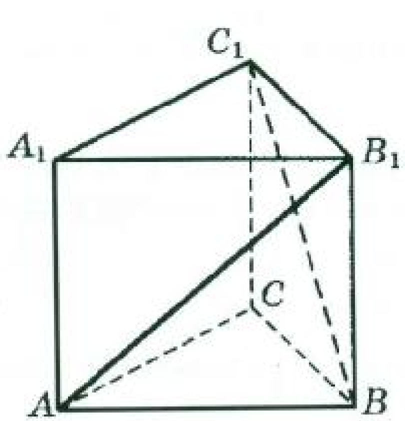
13. В кубе $A...D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.



14 **В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD*, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой *AB* и плоскостью *SAD*.**



15. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.



Ответы и решения

10. Вводя векторы $AA_1=a$, $AB=b$ и $AC=c$, выражаем вектор $A_1C=c–a$ и из скалярного произведения векторов A_1C и AB находим косинус угла между ними.

$\frac{b(c-a)}{|b|\cdot|c-a|}=\frac{bc-ac}{|b|\cdot|c-a|}=\frac{1\cdot 1\cos 60^\circ}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

11. Прямые A_1C_1 и BD лежат в параллельных плоскостях ABC и $A_1B_1C_1$. Расстояние между ними – высота призмы, т.е. $BB_1=\sqrt{3}$.

Искомый угол равен углу между перпендикулярами к упомянутым плоскостям, а именно B_1D и DC. Тангенс этого угла находится из треугольника B_1CD $\frac{B_1C}{DC}=\frac{\sqrt{33+3}}{5}=\frac{6}{5}$.

Ответ $\frac{6}{5}$.

12. Ответ: 2 или 14.

13. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. Искомый угол равен углу между высотой $SH=\frac{\sqrt{3}}{2}$ треугольника ASD и ее проекцией $HO=\frac{1}{2}$ на плоскость основания пирамиды, поскольку $HO||AB$. Из треугольника SHO искомый косинус равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

15. Косинус угла можно найти из скалярного произведения векторов AB_1 и BC_1, длины которых равны $\sqrt{2}$. Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задания группы С3

В заданиях типа С3 требуется решить логарифмическое или показательное неравенство. В решении большинства неравенств используется метод интервалов.

1. Решите неравенство $\dfrac{4^{x^2+3x-2}-(0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0.$

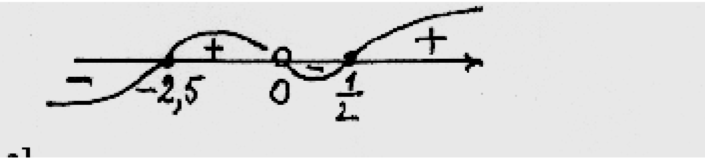
Решение. Найдем нули числителя.

$4^{x^2+3x-2}=(0,5)^{2x^2+2x-1}$, $2^{2x^2+6x-4}=2^{-2x^2-2x+1}$, $2x^2+6x-4=-2x^2-2x+1$, $4x^2+8x-5=0$,

$x_{1;2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+20}}{4}=\dfrac{-4\pm 6}{4}=\dfrac{-2\pm 3}{2}$, $x_1=-\dfrac{5}{2}$, $x_2=\dfrac{1}{2}$.

Найдем нули знаменателя: 5^x–1=0, x_3=0.

Нанесем найденные числа на координатную ось и проведем линию знаков.



Ответ: $(-\infty;-2,5]\cup(0;0,5]$.

2. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}}\ge 0.$

Решение. Все значения выражений, стоящих под знаками логарифмов, должны быть положительными. Это достигается при условии $0,5<x<1,5$.

Найдем нули числителя.

$\log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)=0$, $\log_{5^{-1}}(2x-1)^{-1}+\log_5(2-x)=0$, $\log_5\big((2x-1)(2-x)\big)=0$,

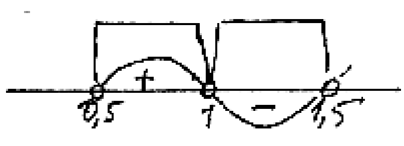
$(2x-1)(2-x)=1$, $-2x^2+5x-3=0, x=1,$ так как второй корень трехчлена, равный 1,5 не принадлежит рассматриваемому множеству значений x.

Найдем нули знаменателя.

$\log_5(2x-1)+\log_5(3-2x)=0$, $(2x-1)(3-2x)=1, -4x^2+8x-4=0$, $-4(x-1)^2=0$.

Знаменатель обращается в нуль при x=1, а в остальных точках рассматриваемого интервала его значения отрицательны.

Нанесем найденные числа на координатную ось, отметим ОДЗ и проведем линию знаков.



Ответ. $0,5<x<1$.

3. Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)}{x}\geq 1.$

Решение. Не стоит здесь освобождаться от знаменателя – придется рассматривать два случая: $x>0$ и $x<0$. Лучше перенести 1 в левую часть и преобразовать в дробь.

$$\frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}-1\geq 0,\ \frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)-x}{x}\geq 0,\ \frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)-\log_2 2^x}{x}\geq 0.$$

Числитель обращается в нуль при $3\cdot 2^{x-1}-1-2^x=0,\ 2^{x-1}=1,\ x=1.$

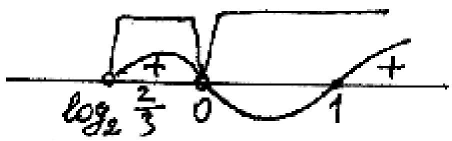
Знаменатель обращается в нуль при $x=0$.

ОДЗ определяется системой двух неравенств:

$$\begin{cases}3\cdot 2^{x-1}-1>0,\\ x\neq 0,\end{cases}\ \begin{cases}\frac{3}{2}\cdot 2^x>1,\\ x\neq 0,\end{cases}\ \begin{cases}2^x>\frac{2}{3},\\ x\neq 0,\end{cases}\ \begin{cases}x>\log_2\frac{2}{3},\\ x\neq 0,\end{cases}\ \log_2\frac{2}{3}<x<0$$

или $x>0$.

Проведем линию знаков и учтем ОДЗ.



Ответ. $\log_2\frac{2}{3}<x<0,\ x\geq 1.$

4. Решите неравенство $\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\geq 0.$

Решение. Должно быть $\log_x\sqrt{3-x}>0,$ т.е. $1<x<2$

На этом множестве исходное неравенство равносильно, $0<\log_x\sqrt{3-x}\leq 1.$, так как $0<\frac{x}{3}<1$.

$$1<\sqrt{3-x}\leq x,\ 1<3-x\leq x^2,\begin{cases}x<2,\\ x^2+x-3\geq 0,\end{cases}\ x^2+x-3=0,\ x_{1;2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

$$\frac{\sqrt{13}-1}{2}\leq x<2.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\leq x<2.$

5. Решите неравенство $\log_x\left(\log_9\left(3^x-9\right)\right)<1.$

Решение.

Чтобы существовал внутренний логарифм, должно быть $x>2$, а значит, основание внешнего логарифма больше 1, и большему значению логарифма соответствует большее значение выражения, стоящего под его знаком.

Получим $0<\log_9(3^x-9)<x.$ Логарифмическая функция с основанием 9 возрастает, поэтому $1<3^x-9<9^x,\ \begin{cases} 3^x>10, \\ 9^x-3^x+9>0, \end{cases}$ Из первого неравенства $x>\log_3 10$, а второе выполняется при всех значениях x. Ответ: $x>\log_3 10$.

6. Решите неравенство $\log_{2x+3} x^2<1.$

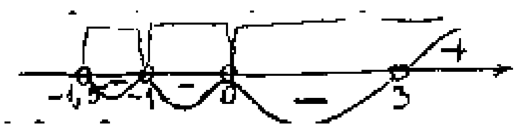
Решение. Часто, когда в задании присутствуют логарифмы с неизвестным в основании, бывает удобно перейти к логарифмам с числовым основанием, с помощью формулы $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Перейдем, например, к десятичным логарифмам.

$\dfrac{\lg x^2}{\lg(2x+3)}<1,\ \dfrac{\lg x^2-\lg(2x+3)}{\lg(2x+3)}<0.$ Теперь решаем неравенство методом интервалов.

Числитель обращается в нуль при $x^2=2x+3$, $x^2–2x–3=0$, $x_1=–1$, $x_2=3$. Кроме того, должно быть $x>–1,5$ и $x\neq 0$.

Знаменатель обращается в нуль при $2x+3=1$, $x=–1$. При переходе через –1 знак меняют и числитель и знаменатель дроби, поэтому сама дробь знак не изменяет.

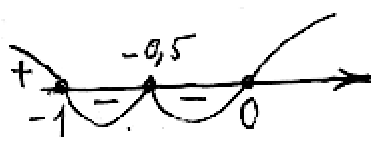


Ответ. $–1,5<x<–1$, $–1<x<0$, $0<x<3$.

7. Решите неравенство $\sqrt{(2x+1)^4-(2x+1)^2}+(2x+1)^2\geq 0.$

Решение. Неравенство верно при всех значениях х, входящих в его ОДЗ. Эти значения определяются условием $(2x+1)^4-(2x+1)^2\geq 0.$

Имеем: $(2x+1)^2((2x+1)^2-1)\geq 0, (2x+1)^2\cdot x(x+1)\geq 0$.



Ответ: $x\geq 0$, $x\leq –1$.

8. Решите неравенство $\sqrt{-25x^2+15x-2}(8x^2-6x+1)\geq 0.$

Решение. Неравенство выполняется в двух случаях:

1) $–25x^2+15x–2=0$, 2) $\begin{cases} -25x^2+15x-2>0, \\ 8x^2-6x+1\geq 0. \end{cases}$

$–25x^2+15x–2=0$ при $x=0,2$, $x=0,4$.

$\begin{cases} -25x^2+15x-2>0, \\ 8x^2-6x+1\geq 0, \end{cases} \begin{cases} 0,2<x<0,4, \\ x\leq 0,25\ \textit{или}\ x\geq 0,5, \end{cases}$ $0,2<x\leq 0,25.$ Ответ: $0,2\leq x\leq 0,25,\ x=0,4.$

Задания для самостоятельного решения

Решите неравенство

9. Решите неравенство $\log_5(x+2)+\log_5(1-x)\le\log_5\left((1-x)\left(x^2-8x-8\right)\right)$.

10. Решите неравенство $\dfrac{\log_3 x}{\log_3(3x+2)}<1$

11. Решите неравенство $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}<0$

12. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$

13. Решите неравенство $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\le 0.$

14. $\log_{x+1}(19+18x-x^2)-\dfrac{1}{16}\log^2_{x+1}(x-19)^2\ge 2.$

Ответы и решения

9. ОДЗ неравенства определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x+2>0, \\ 1-x>0, \\ x^2-8x-8>0, \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2, \\ x<1, \\ x<4-\sqrt{24}\ \textit{или}\ x>4+\sqrt{24}, \end{cases} \quad -2<x<4-\sqrt{24}.$$

При этих значениях x имеем:

$\log_5(x+2)+\log_5(1-x)\le\log_5(1-x)+\log_5\left(x^2-8x-8\right)$, $x+2\le x^2-8x-8$,

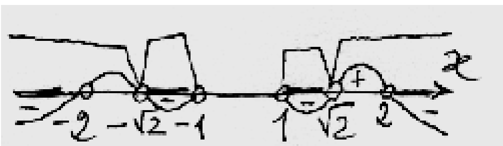
$x^2-9x-10\ge 0$, $x\le -1\,\textit{или}\,x\ge 10$. С учетом ОДЗ получаем $-2<x\le-1$.

Ответ: $-2<x\le-1$.

10. $\dfrac{\log_3 x-\log_3(3x+2)}{\log_3(3x+2)}<0$. При $x>0$ числитель дроби принимает отрицательные значения, а знаменатель положительные. Значит неравенство выполняется при всех положительных значениях x.

Ответ: $x>0$.

11. Числитель дроби обращается в ноль при $x=-2$ и при $x=2$, а знаменатель – при $x=-\sqrt{2}$ и $x=\sqrt{2}$.

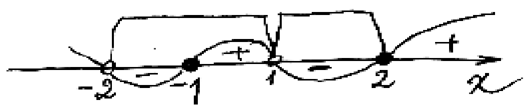


ОДЗ определяется условием $|x|>1$, $|x|\ne\sqrt{2}$.

Ответ: $x<-2$, $-\sqrt{2}<x<-1,\ 1<x<\sqrt{2},\ x>2$.

12. $\dfrac{\ln(x+2)\cdot\ln(3-x)}{\ln(2-x)\cdot\ln(x+3)}\le 0$. Нули числителя: $x=-1$, $x=2$, нули знаменателя $x=1$, $x=-2$.

ОДЗ $-2<x<1$, $1<x<2$.



Ответ: $-2<x\le-1$, $1<x<2$.

13. $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\le 2.$ Должно быть $4+7x-2x^2>0$, $-0,5<x<4$. Для всех этих значений $|x+2|>1$. Имеем $4+7x-2x^2\le(x+2)^2$, $3x^2-3x\ge0$, $x\le0$ или $x\ge1$. С учетом ранее найденного ограничения получаем $-0,5<x\le0$ или $1\le x<4$.

Ответ: $-0,5<x\le0$ или $1\le x<4$.

14. $\log_{x+1}((19-x)(x+1))-\dfrac{1}{16}\log^2_{x+1}(x-19)^2\ge 2.$

ОДЗ: $-1<x<0$, $0<x<19$. На этом множестве имеем:

$$\log_{x+1}(19-x)+\log_{x+1}(x+1)-\frac{1}{4}\log^2_{x+1}(19-x)\ge 2,\ \log^2_{x+1}(19-x)-4\log_{x+1}(19-x)+4\le 0,$$

$$(\log_{x+1}(19-x)-2)^2\le 0,\ \log_{x+1}(19-x)=2,\ x^2+3x-18=0,\ x_1=3, x_2=-6.$$

С учетом ОДЗ $x=3$.

Ответ: 3.

Задания группы С4

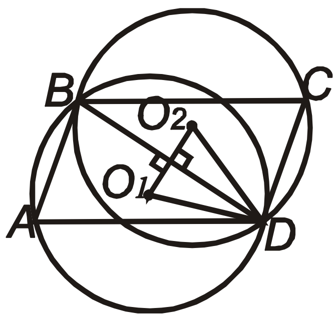
В заданиях типа С4 предлагается планиметрическая задача на вычисление длин, площадей или углов. При решении задач полезно делать рисунки, хотя это и не обязательно. Во многих заданиях этого раздела приходится рассматривать несколько разных конфигураций, удовлетворяющих условию.

1. Дана окружность и точка M. Точки A и B лежат на окружности, причем A – ближайшая к M точка окружности, а B – наиболее удаленная от M точка окружности. Найдите радиус окружности, если $MA=a$ и $MB=b$.

Решение. Вне зависимости от того внутри или снаружи круга, ограниченного данной окружностью, расположена точка M, AB является диаметром окружности.

Если точка M лежит внутри круга, то $MA+MB$ – диаметр и радиус окружности равен $\frac{a+b}{2}$, а если – вне, то $\frac{b-a}{2}$. Ответ: $\frac{a+b}{2}$ или $\frac{b-a}{2}$.

2. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB=a$, $BC=b$ и $\angle BAD=\alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.



Решение. Сделаем рисунок для случая, когда угол A параллелограмма острый.

Треугольник O_1DO_2 равнобедренный – его боковые стороны равны радиусам описанных окружностей, а высота, проведенная к основанию, – половина диагонали BD параллелограмма.

Половина искомого отрезка – катет прямоугольного треугольника с гипотенузой O_1D и катетом $\frac{c}{2}$, где

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha},\; O_1D=\frac{c}{2\sin\alpha},$$

$$O_1O_2=2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\cdot\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=$$

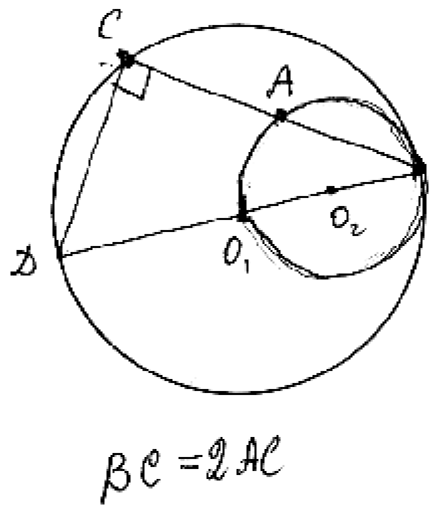
$=ctg\alpha\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$. Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$.

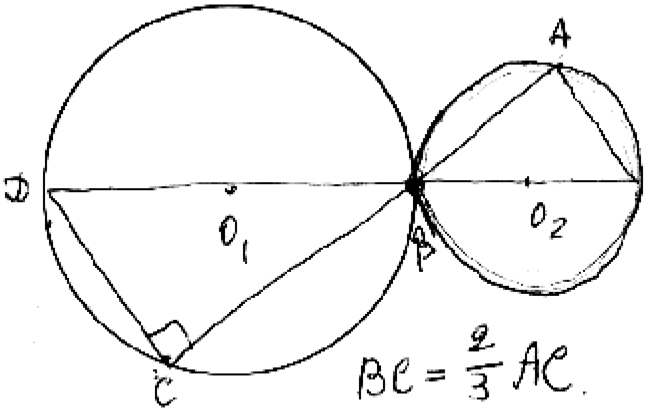
Примечание.

Следует рассмотреть также случай тупого угла A. Здесь угол α окажется тупым, что скажется на знаке ctgα.

3. Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке С. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Найдите BC.

Решение. Сделайте два рисунка для случая внутреннего и внешнего касаний. В обоих случаях окружности гомотетичны относительно их общей точки B с коэффициентом 2 по модулю. (Можно не использовать понятие гомотетии и говорить о подобии). Значит, в случае внутреннего касания CB=2AB и, следовательно BC=2AC=2·3$\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. В случае внешнего касания $BC = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.Ответ: $6\sqrt{2}$ или $2\sqrt{2}$.





4. Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найдите угол MBC.

Решение. Медиана делит треугольник на 2 равновеликих. Обозначим искомый угол буквой α, длину высоты и медианы буквой l , а длину стороны, противолежащей вершине A – буквой a. В треугольнике BCM высота, опущенная из точки M, равна $l\sin\alpha$. Тогда $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta MBC} = 2\cdot\frac{1}{2}l\sin\alpha\cdot a = al\sin\alpha.$

$al\sin\alpha$ = 0,5al, $\sin\alpha$=0,5, α=30° или α=150° (В последнем случае высота опущена на продолжение стороны). Ответ: 150°, 30°.

Во многих задачах оказываются задействованы равносторонний треугольник, или прямоугольный треугольник с острым углом 30°. Заметив, что такой треугольник удовлетворяет условию, можно практически сразу дать ответ, останется только объяснить, что другой вариант невозможен.

5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите $\angle ACB$.

Решение. Проведем средние линии в треугольнике ABC и получим треугольник $A_1B_1C_1$ подобный исходному с коэффициентом 0,5 (рис.1). Высоты этого треугольника соответствуют серединным перпендикулярам к сторонам треугольника ABC, значит, $C_1O = 0{,}5CH$. O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, радиус OA которой по условию задачи равен CH. В прямоугольном треугольнике C_1OA катет OC_1 равен половине гипотенузы, $\angle OAC_1$=30°. Треугольник AOB равнобедренный, значит, $\angle AOB$=120°. Угол C опирается на дугу AB.

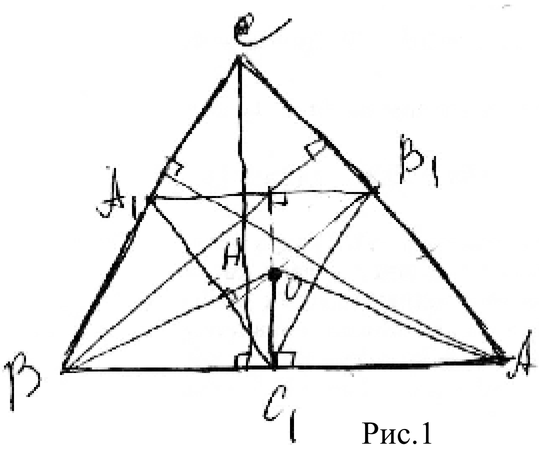


Рис.1

а) Угол C острый. Вписанный угол ACB равен 60° (рис.1).

б) Угол C тупой (рис.2). Вписанный угол ACB равен 120°.

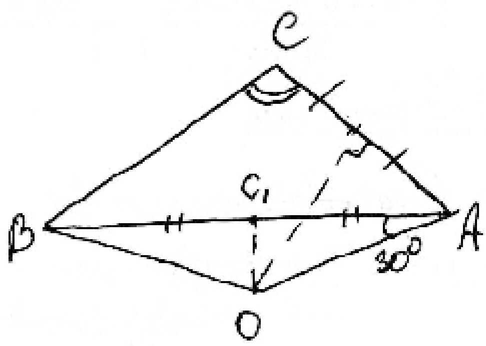


Рис.2

Ответ: 60° или 120°.

Комментарий. Вряд ли можно будет снизить число баллов за решение данной задачи, если ученик ограничится рассмотрением остроугольного треугольника, отметив в решении, что в тупоугольном треугольнике пересекаются продолжения высот, а не высоты.

6. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O – центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Известно, что BC=12, MN=6. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.

Решение. Поскольку сказано, что высоты проведены в треугольнике – этот треугольник остроугольный. Угол A образован двумя секущими окружности с диаметром BC. Дуга BC – 180°, а дуга MN – 60°, так как MN в 2 раза меньше диаметра, а значит, равна стороне правильного вписанного шестиугольника. Пусть окружность, касающаяся стороны BC, касается и продолжений сторон AB и AC в точках E и F. Тогда угол O

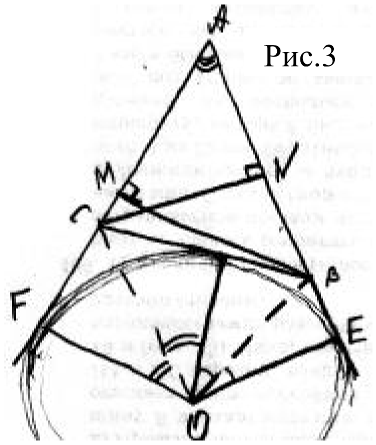


Рис.3

четырехугольника $OEAF$ равен 180°–60°=120°. $\angle BOC = 60°$. Радиус искомой окружности равен $\frac{BC}{2\sin\angle O}=\frac{12}{2\cdot 0,5}=12$

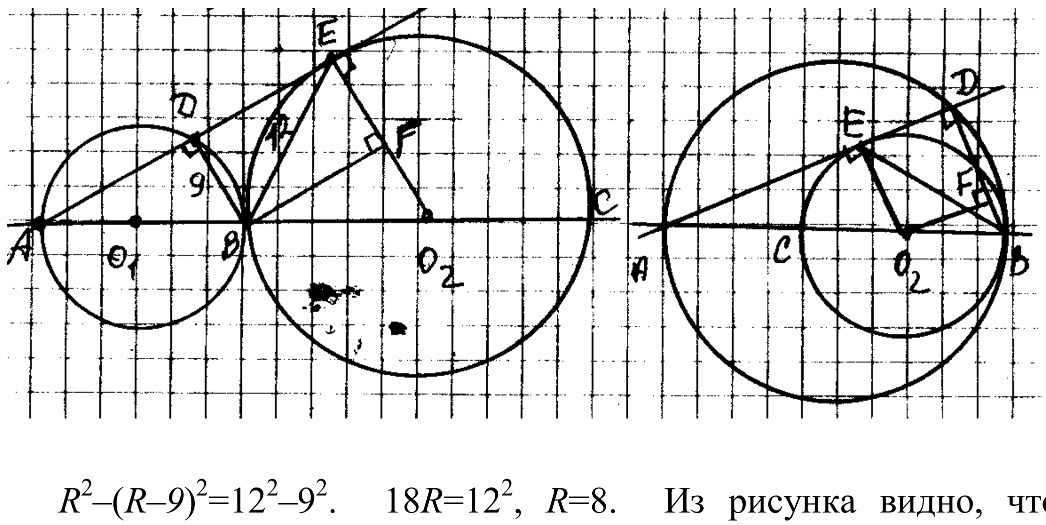
Ответ: 12.

Этот ответ можно было получить сразу, заметив, что длина MN равна половине стороны BC и предположив, что MN – средняя линия. Тогда высоты совпадают с медианами, треугольник ABC – равносторонний и т.д. Однако, хотя в данном случае это и не влияет на ответ, такое решение не верно, так как в общем случае MN не обязана быть средней линией.

Задания для самостоятельного решения

7. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC – диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E. Известно, что BD=9, BE=12. Найдите радиусы окружности.

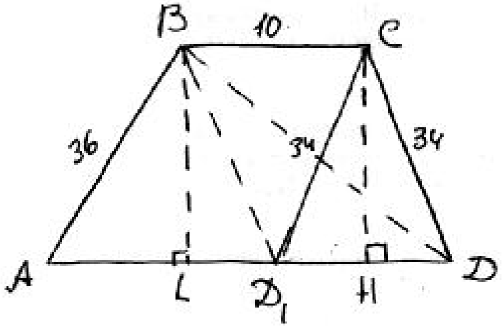
Решение. Придется рассмотреть два случая: внешнее касание и внутреннее касание окружностей (рис.). В обоих случаях, обозначив центр второй окружности O_2, а ее радиус – R из прямоугольного треугольника O_2FB получаем $R^2–(R–9)^2=DE^2$ (DE в случае внешнего касания равно BF, а в случае внутреннего касания равно O_2F). DE^2 находим из прямоугольного треугольника BDE: $DE^2=12^2–9^2$.



$R^2–(R–9)^2=12^2–9^2$. $18R=12^2$, R=8. Из рисунка видно, что в случае внешнего касания радиус R должен быть больше 9, поэтому первый вариант не подходит.

Из подобия треугольников O_2FB и AEO_2 находим AO_2=64 и затем AB=72 и половину AB=36 – радиус первой окружности. Ответ: 36 и 8.

8. Дана трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами AB=36, CD=34 и верхним основанием BC=10. Известно, что $\cos\angle ABC = -\frac{1}{3}$. Найдите BD.



Решение. Выполняя чертеж, соответствующий условию задачи, приходим к выводу, что возможны два положения точки D – на рисунке это D и D'.

Случай 1. $\angle BCD$ – тупой. CH – высота трапеции,

$$CH = AL = 36\cdot\sin\left(180^\circ - \angle ABC\right) = 36\cdot\sin\angle ABC = 36\cdot\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{36}{3}\sqrt{8} = 24\sqrt{2}.$$

$HD=HD_1=\sqrt{34^2-24^2\cdot 2}=\sqrt{4}=2$. $BD^2=BL^2+LD^2=BL^2\pm(LH\pm HD)^2$.

$BD=\sqrt{24^2\cdot 2+8^2}=8\sqrt{9\cdot 2+1}=8\sqrt{19}$.

$BD_1=\sqrt{24^2\cdot 2+12^2}=12\sqrt{4\cdot 2+1}=12\cdot 3=36$.

Ответ: 36 или $8\sqrt{19}$.

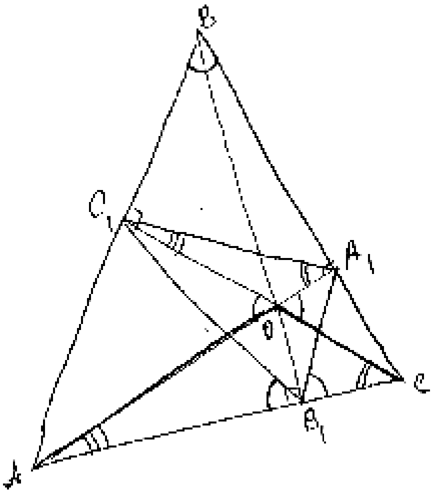
9. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенной внутри трапеции.

Указание. Продолжить боковые стороны трапеции до пересечения и выразить площади частей трапеции как разность площадей подобных треугольников.

Ответ: $\frac{3a^2+2b^2}{5}$ или $\frac{3b^2+2a^2}{5}$

10. Точки A_1, B_1 и C_1 – основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60° и 30°. Найдите углы треугольника ABC.

Решение. Придется рассмотреть случаи – 1)тупоугольного и 2) остроугольного треугольника ABC.



1) В остроугольном треугольнике О – точка пересечения высот. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 содержат биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$. В этом легко убедиться, рассмотрев четверки точек AC_1OB_1 и CA_1OB_1. Каждая из них лежит на своей окружности. $\angle AB_1C_1=\angle AOC_1$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. $\angle AOC_1 = \angle COA_1$ как вертикальные, и $\angle COA_1=\angle CB_1A_1$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Значит, $\angle AB_1C_1=\angle CB_1A_1$. Луч B_1B делит угол B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ на части, дополняющие равные углы до прямых углов, значит, он является биссектрисой угла B_1. Аналогично и другие высоты треугольника ABC.

Чтобы перейти к углам треугольника ABC рассмотрим вписанный четырехугольник A_1OC_1B. Его угол O в сумме с его углом B составляют 180°, т.е. столько же, сколько угол O составляет в сумме со своим смежным углом $\angle AB_1C_1$. Значит, $\angle AB_1C_1=\angle B$ (заметим, что стороны треугольника $A_1B_1C_1$ отсекают от треугольника ABC подобные ему треугольники). Чтобы найти угол B нужно из 90° вычесть половину угла B_1. При этом может получиться 45°, 60° или 75°.

2) Чтобы получить случай тупоугольного треугольника ABC, например, с тупым углом B, достаточно на рисунке поменять местами обозначения точек O и B. Угол B получившегося треугольника может быть равен 180°– 45°, 180°– 60° или 180°– 75°, т.е. 135°, 120° или 105°. Два других угла треугольника ABC равны половинам соответствующих углов треугольника $A_1B_1C_1$. Получим 135°, 30° и 15°; 120°, 45° и 15°; 105°, 45° и 30°.

Ответ: 45°, 60° и 75°; 135°, 30° и 15°; 120°, 45° и 15°; 105°, 45° и 30°.

11. Треугольник ABC вписан в окружность с диаметром 12. Известно, что AB=6 и BC=4. Найдите AC.

Решение. Сторона AB равна радиусу окружности, значит, она стягивает ее дугу в 60°. В зависимости от расположения точки C (два случая), угол ACB может быть равен 30° или 150°. Искомую сторону находим по теореме косинусов: $AB^2=AC^2+BC^2-2\,AC\cdot BC\cos\angle ACB$. Ответ: $2\sqrt{3}+4\sqrt{2}$ или $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

Задания группы С5

В группе C5 *предлагаются задания с параметрами. Часть заданий содержит модули. Один из возможных подходов к их решению заключается в рассмотрении выражения с модулями на промежутках, на которых эти модули можно снять.*

1. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2+4x+\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|-a$ принимает только неотрицательные значения.

Решение 1. Рассмотрим эту функцию на интервалах, на которых можно снять знак модуля.

$x^2-\frac{3}{2}x-1=0,\ 2x^2-3x-2=0,\ x_{1;2}=\frac{3\pm5}{4}, x_1=-0{,}5,\ x_2=2.$

На промежутках $x\le-0{,}5$ и $x\ge2$ должно быть $4x^2+5x-2-2a\ge0$. Свое наименьшее значение квадратный трехчлен, стоящий в левой части неравенства, принимает при $x=-\frac{5}{2\cdot4}=-\frac{5}{8}$, принадлежащем множеству $(-\infty;-0{,}5)\cup[2;+\infty)$. Это значение должно быть неотрицательным $\frac{25}{16}-\frac{25}{8}-2-2a\ge0,\ a\le-1\frac{25}{32}$.

На промежутке $-0{,}5<x<2$ должно быть $11x+2-2a\ge0$. В силу возрастания функция $y=11x+2-2a$ принимает на данном промежутке значения большие, чем $f(0{,}5)=-5{,}5+2-2a=-3{,}5-2a$, значит, $-3{,}5-2a\ge0$, $a\le-1{,}75$.

Должны выполняться оба ограничения на a: $\begin{cases} a\le-1\frac{25}{32}, \\ a\le-1{,}75, \end{cases}$ $a\le-1\frac{25}{32}$.

Ответ: $a\le-1\frac{25}{32}$.

Решение 2. Рассмотрим функцию $f(x)$ на интервалах, на которых можно снять знак модуля. При $x\le0{,}5$ и $x\ge2$ $x^2-1{,}5x-1\ge0$, поэтому $\left|x^2-1{,}5x-1\right|=x^2-1{,}5x-1$ и, следовательно,

$$f(x)=x^2+4x+x^2-1{,}5x-1-a=2x^2+2{,}5x-1-a.$$

Наименьшее значение эта функция принимает в точке $x=-\frac{5}{8}$ из промежутка $(-\infty;-0{,}5]$. При $-0{,}5<x<2$ имеем $x^2-1{,}5x-1<0$ и

$$f(x)=x^2+4x-\left(x^2-1{,}5x-1\right)-a=5{,}5x+1-a.$$

Таким образом, на промежутке $\left(-\infty;-\frac{5}{8}\right]$ функция f(x) убывает, а на множестве $\left[-\frac{5}{8};+\infty\right)$ возрастает. Следовательно, наименьшее значение она принимает при $x=-\frac{5}{8}$. Для того, чтобы функция f(x) принимала на всей числовой прямой только неотрицательные значения, необходимо и достаточно, чтобы $f\left(-\frac{5}{8}\right)=-1\frac{25}{32}-a\ge 0$, т.е. $a\le -1\frac{25}{32}$.

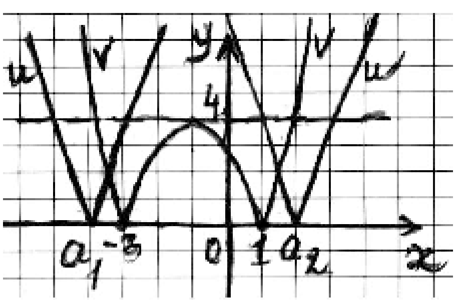
Ответ: $a\le -1\frac{25}{32}$.

В решении многих задач с параметрами на помощь приходят различные графические соображения

2. Найдите все такие *a*, что наименьшее значение функции $f(x)=4|x-a|+|x^2+2x-3|$ меньше 4.

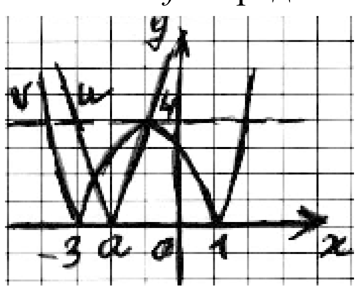
Решение 1. Каким бы ни было значение *a* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$, Значит, непрерывная функция $f(x)$ имеет наименьшее значение. Оно совпадает с ее минимумом (одним из минимумов). В точке минимума $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, т.е. убывание функции сменяется ее возрастанием.

Во-первых, это происходит в точках, где скорости изменения слагаемых $u=4|x-a|$ и $v=|x^2+2x-3|$ противоположны. $|u'|=4$. $|f'(x)|=4$ при $|2x+2|=4$, $|x+1|=2$, $x_1=-3$, $x_2=1$. Заметим, что эти значения *x* являются нулями функции *v*. Графики *u* и *v* должны выглядеть примерно так:



На рисунках изображены предельные случаи, когда минимумы $u(-3)=u(1)=4$. Из рисунка ясно, что $a_1=-4$ и $a_2=2$. Чтобы минимумы были меньше 4 нужно брать значения *a* из (–4;–3] или из [1; 2)

Во-вторых, на промежутке (–3;1) характер изменения *f* определяется характером изменения *u*, так как $|u'|>|v'|$ и f' имеет тот же знак, что и u'. Следовательно минимум на этом промежутке *f* принимает в точке $x=a$. Заметим, что он равен значению $v(a)$. При этом, при $a=-1$ $v(a)=4$, а при других



значениях a из этого промежутка $v(a)<4$.

Объединяя найденные промежутки, получим объединение $(-4;-1)\cup(-1;2)$. При любом значении a из этого промежутка реализуется какой-то из рассмотренных выше вариантов.

Ответ: $(-4;-1)\cup(-1;2)$.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=1$ имеет ровно восемь различных решений.

Решение. Имеем $\sqrt{a^2-x^2}=2\pi n.$ Чтобы это уравнение имело решение, n должно быть целым неотрицательным числом.

Выразим x^2. $x^2=a^2-(2\pi n)^2.$

Графически левая часть этого уравнения представляет собой параболу $y=x^2$, а правая – прямые вида $y=p_n$, где $p_n=a^2-(2\pi n)^2.$

Чтобы уравнение имело ровно 8 решений, параболу должны пересекать (касание не подходит) ровно четыре из этих прямых, т.е. $y=p_n$, при n=0, 1, 2, 3. Прямая $y=p_5$ с параболой общих точек не должна имееть, т.е. эта прямая должна располагаться в нижней координатной полуплоскости.

Значит, одновременно должны выполняться неравенства $p_3>0$ и $p_4<0$, т.е. $(2\cdot 3\pi)^2<a^2<(2\cdot 4\pi)^2,\ 6\pi<|a|<8\pi.$

Ответ: $6\pi<|a|<8\pi.$

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $3x+|2x+|a-x||=7|x+2|$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Заметим, что выражение, стоящее в левой части уравнения, задает неубывающую функцию $f(x)$, кусочно-заданную линейными функциями с неотрицательными угловыми коэффициентами.

Если значение $f(-2)$ неотрицательно, то ее график имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции $g(x)$, заданной правой частью уравнения. Если же это значение отрицательно, то и при $x\le-2$, где $f(x)<0$, и при $x>-2$, где $f(x)<7x+14$ (поскольку упомянутые выше угловые коэффициенты линейных функций, составляющих $f(x)$ меньше 7) график функции $f(x)$ располагается под графиком $g(x)$. Таким образом, для наличия корня должно быть $f(-2)\ge0$: $3\cdot(-2)+|2\cdot(-2)+|a+2||\ge0$, $||a+2|-4|\ge6$, $|a+2|\ge10$, $a\ge8$, $a\le-12$ или $|a+2|\le-2$, что невозможно.

Можно было перенести все в одну часть равенства $7|x+2|-3x-|2x+|a-x||=0$ и заметить, что при $x<-2$ непрерывная функция $g(x)= 7|x+2|-3x-|2x+|a-x||$

убывает, поскольку на любом из ее линейных кусочков угловой коэффициент отрицателен, а при $x \geq -2$ она возрастает. Отсюда ясно, что для выполнения требования задачи должно быть $g(-2) \leq 0$.

Ответ: $a \geq 8$, $a \leq -12$.

5. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $x^2-(|a+5|-|a-5|)x+(a-12)(a+12)=0$ имеет два различных отрицательных корня.

Решение. Два различных корня квадратное уравнение имеет при положительном дискриминанте. Кроме того, из формул Виета следует, что оба корня отрицательны, когда и свободный член, и коэффициент при x положительны.

При решении системы начинаем со второго и третьего неравенств и применяем их решения в первом неравенстве системы для снятия модулей.

$$\begin{cases} (|a+5|-|a-5|)^2-4(a-12)(a+12)>0, \\ (a-12)(a+12)>0, \\ -(|a+5|-|a-5|)>0, \end{cases} \begin{cases} (-5-a-5+a)^2-4(a^2-144)>0, \\ a<-12 \,или\, a>12, \\ a<0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2<676, \\ a<-12, \end{cases} \begin{cases} -13<a<13, \\ a<-12, \end{cases} -13<a<-12.$$

Ответ: $-13<a<-12$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых общие решения неравенств $y+2x \geq a$ и $y-x \geq 2a$ являются решениями неравенства $2y-x>a+3$.

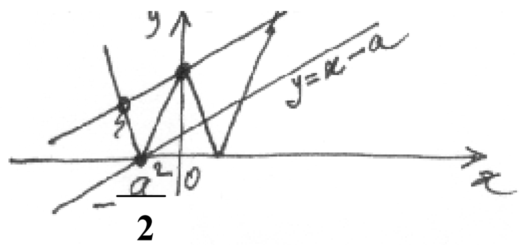
Решение. Другими словами, нужно найти все значения a, при которых решение системы двух первых неравенств является подмножеством решений третьего неравенства.

Перепишем неравенства в виде $y \geq a-2x$, $y \geq 2a+x$ и $y>\frac{x}{2}+\frac{a+3}{2}$. Неравенствам удовлетворяют точки координатной плоскости, расположенные на и над прямыми $y=a-2x$, $y=2a+x$ и над прямой $y=\frac{x}{2}+\frac{a+3}{2}$. Значит, третья прямая должна проходить через точку пересечения двух первых или под ней. Найдем координаты этой точки.

$\begin{cases} y = a - 2x, \\ y = 2a + x, \end{cases} \begin{cases} 2a + x = a - 2x, \\ y = 2a + x, \end{cases} \begin{cases} x = -\dfrac{a}{3}, \\ y = \dfrac{5a}{3}. \end{cases}$ При $x = -\dfrac{a}{3}$ должно быть $\dfrac{5a}{3} \ge -\dfrac{a}{2\cdot(-3)} + \dfrac{a+3}{2}$, т.е. $10a \ge -a + 3a + 9,\ 8a \ge 9,\ a \ge \dfrac{9}{8}$. Ответ: $a \ge \dfrac{9}{8}$.

7. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых функция $f(x) = 2\left|2|x| - a^2\right| - x + a$ имеет ровно три нуля функции.

Решение. Удобно использовать графические соображения. Для выполнения требования задачи графики функций у=2|2|x|–a^2| и y=x–a должны иметь ровно три общих точки. При a≠0 (a=0 не удовлетворяет требованию)



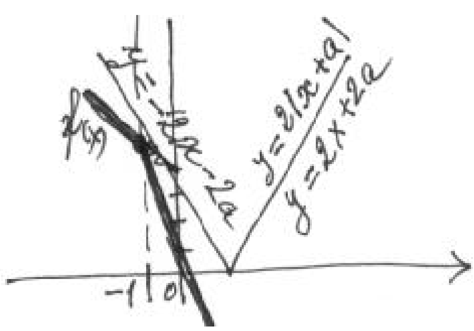
первый график касается оси абсцисс в точках с абсциссами $\pm\dfrac{a^2}{2}$, так как все его линейные участки имеют угловые коэффициенты по модулю равные 4. Прямая y=x–a должна проходить через точку с абсциссой $-\dfrac{a^2}{2}$ и ординатой 0, либо через точку с абсциссой 0 и ординатой 2a^2:

$-\dfrac{a^2}{2} - a = 0$ или $-a = 2a^2$. Поскольку a≠0 имеем a=–2 или a= –0,5.

Ответ: a=–2 и a= –0,5.

8. Найдите все значения a такие, что для любого x выполняется неравенство |x+1|+2|x+a|>3–2x.

Решение. Перепишем неравенство 2|x+a|>3–2x–|x+1| и построим график функции f, заданной его правой частью. При x<–1 это часть прямой y=4–x, а при x≥–1 – это часть прямой y=2–3x. Точка $(-1;5)$ должна лежать под левой ветвью графика функции $y = 2|x + a|$, т.е. $5 < (-2)(-1) - 2a,\ a < -1{,}5.$

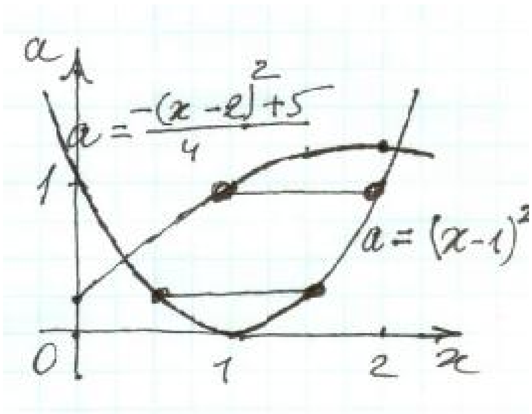


Ответ: a<1,5.

Некоторые задачи, оказываются довольно трудоемкими – к этому нужно быть морально готовым.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $x^2–2x≤a–1$ и $x^2–4x≤1–4a$ образуют на числовой прямой отрезок длины единица.

Решение 1. Перепишем данные неравенства: 1) $a≥x^2–2x+1$ и 2) $a \le \frac{-x^2+4x+1}{4}$ и рассмотрим параболы $a=(x–1)^2$ и $a=\frac{-(x-2)^2+5}{4}$ в системе координат xOa. (рис.). Общими решениями неравенств являются координаты точек области, состоящей из точек, лежащих одновременно и над первой, и под второй параболой, а также ее границы.



Длина отрезка этой области, параллельного оси абсцисс, концы которого, точки $(x;a)$ и $(x+1;a)$, принадлежат параболам, должна быть равна единице. Рассмотрим три случая.

1) Оба конца принадлежат первой параболе: $(x–1)^2=x^2$, $x=0{,}5$. $a=0{,}25$. Концы отрезка лежат под второй параболой и, значит, их координаты (0,5;0,25), (1,5;0,25) удовлетворяют второму неравенству. Таким образом, $a=0{,}25$ удовлетворяет требованию.

2) Оба конца принадлежат второй параболе. Ось параболы $x=2$, значит абсциссы концов отрезка 1,5 и 2,5. Правый конец отрезка, точка $(2{,}5;\ 1\frac{3}{16})$ оказывается под первой параболой, значит, $a=1\frac{3}{16}$ не удовлетворяет требованию.

3) Левый конец принадлежит второй, а правый – первой параболе.

$\frac{-x^2+4x+1}{4}=x^2, 5x^2-4x-1=0, x_1=-\frac{1}{5}, x_2=1.$ Точка с абсциссой $-\frac{1}{5}$ не входит в область решений.

При $x=1$ левый конец отрезка принадлежит области решений системы, а правый конец имеет абсциссу 2 и ординату $a=1$. Он расположен под вершиной второй параболы, значит, $a=1$ удовлетворяет требованию.

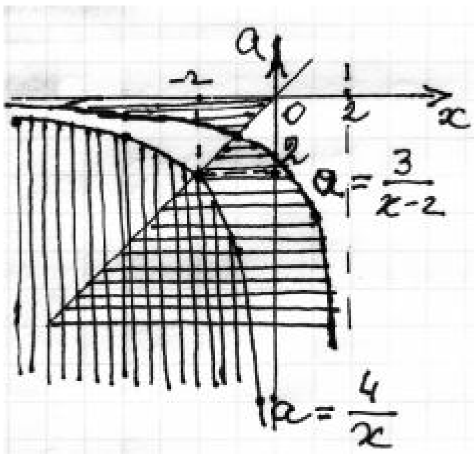
Ответ: 0,25, 1.

10. Найти все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\geq 0,\\ \quad ax\geq 4\end{cases}$ не имеет решений.

Решение. Из второго неравенства **с**разу видно, что $a\neq 0$. Кроме того, при любом положительном значении a можно взять x достаточно большим, чтобы стали положительными оба множителя первого неравенства и выполнялось второе.

Пусть $a<0$. Перепишем неравенства системы $\begin{cases}(x-a)(a-\dfrac{3}{x-2})\geq 0,\\ \quad a\geq \dfrac{4}{x}.\end{cases}$

Изобразим решение решения первого неравенства системы на координатной плоскости xOa (ограничимся нижней полуплоскостью) горизонтальной штриховкой, а второго – вертикальной.



Решение первого неравенства напоминает метод интервалов – мы, как и в методе интервалов, приравниваем каждый множитель нулю и строим соответствующие линии, а затем находим знаки произведения в образовавшихся на координатной плоскости областях, поскольку каждый из множителей может поменять знак только при переходе через соответствующую линию.

Приравнивая множители, стоящие в левой части неравенства к нулю, получаем $a=x$ и $a=\dfrac{3}{x-2}$.

Точки, координаты которых являются решениями второго неравенства системы, в левой полуплоскости расположены *на* и *под* гиперболой $a=\dfrac{4}{x}$.

Ни одной точки с ординатой $-2<a<0$ не попало в область двойной штриховки, координаты точек которой являются решениями обоих неравенств. Поскольку, как уже отмечалось выше, $a\neq 0$, получаем ответ.

Ответ: $-2<a\leq 0$.

11. Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение $|2x+6|+|2x-8|=ax+12$ имеет единственное решение.

Решение. Построим график функции $y=|2x+6|+|2x-8|$. Прямая $y=ax+12$ имеет с графиком единственную общую точку в трех случаях: 1) прямая проходит через точку (–3;14), 2) прямая проходит через точку (4; 14), 3) угловой коэффициент прямой по модулю не меньше 4.

1) $a=(12-14):3=-\frac{2}{3}$, 2) $a=(12-14):(-4)=0{,}5$, 3) $|a|\geq 4$.

Ответ: $-\frac{2}{3}$; 0,5; $(-\infty; -4]$; $[4;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

12. Найдите все значения a такие, что для любого x выполняется неравенство $2x+2|x-a|+|x-1|>3$. Ответ: $a>1{,}5$.

13. Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции $f(x)=\frac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}$ лежит в интервале $(-3;3)$. Ответ: $a\in(-5;1)$.

14. Найти все значения a, такие, что для любого x выполняется неравенство $2x+2|x-a|+|x-1|>2$. Ответ: $a>1$.

15. Найти все значения a, такие, что уравнение $|x+3|-1=|2x-a|$ имеет единственное решение. Ответ: $a=-8$, $a=-4$.

16. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4x-|3x-|x+a||=9|x-3|$ имеет два корня. Ответ: $a\in(-24;18)$.

Задания группы С6

Задания группы С6 используют свойства делимости целых чисел.

1. Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачеркивания первой цифры их десятичной записи снова получается десятичная запись числа, являющегося степенью двойки.

Решение. Из первых степеней двойки: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, … числа 32 и 64 удовлетворяют условию задачи.

Зачеркнуть цифру 3 числа 32, значит, из числа 32 вычесть $3\cdot10$, т. е. $32 - 3\cdot10 = 2$, откуда получим $2(2^4 - 1) = 3\cdot10$.

Из числа 64 вычитаем $6\cdot10$, т. е. $64 - 6\cdot10 = 4$, откуда получим $2^2(2^4 - 1) = 6\cdot10$. Вообще, должно быть $2^{m+l} - p\cdot10^k = 2^m$, таким образом, для искомой степени двойки должно выполняться равенство $2^m(2^l - 1) = p\cdot10^k$, (1)
где k — количество цифр в десятичной записи искомой степени двойки после зачеркнутой цифры p. Значит, 2^l-1 делится на 5, и следовательно, 2^l оканчивается цифрой 6 или 1. Цифрой 1 оканчиваться 2^l не может, а цифрой 6 оканчиваются 2^4, 2^8, …, т.е. $l=4q$, где q – натуральное число).

Имеем $2^m\left(2^{4q}-1\right) = p\cdot2^k\cdot5^k$, $2^{4q} - 1 = (2^{2q} - 1)(2^{2q} + 1) = p\cdot2^k\cdot5^k$.

1. При $q=1$ имеем $2^m\cdot3\cdot5 = p\cdot2^k\cdot5^k$, $k=1,\ m=1,\ p=3$ или $k=1, m=2,\ p=6$. Получили $2^{m+l} = 2^{m+4q} = 2^{1+4} = 32$ или $2^{m+l} = 2^6 = 64$.

2. При $q>1$ только один из нечетных множителей $2^{2q} - 1$ или $2^{2q} + 1$ может делиться на 5. Значит, другой является множителем цифры р, но при q≥2 имеем $2^{2q}\geq16$ и числа $2^{2q} - 1$ и $2^{2q} + 1$ множителями цифры быть не могут. Значит, при $q>1$ решений нет.

Ответ: 32, 64.

2. Найдите все пары пятизначных чисел x, y, такие что число $\overline{xy}$, полученное приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x, делится на xy.

Решение. По условию задачи число $\overline{xy} = 10^5x + y$ делится на xy, т. е. верно равенство $10^5x + y = pxy$ (1), где $p \in N$.

Выразим $y = x\left(py - 10^5\right)$, $y = qx$, где q – цифра, иначе число y не будет пятизначным числом. Заменив в равенстве (1) y на qx: $10^5x + qx = pqx^2$, и разделив полученное равенство на x, имеем: $10^5 + q = pqx$.

$10000q=pqx$. Проверим, какие цифры q являются делителями числа $10000q$, получим $q \in \{1, 2, 4, 5, 8\}$, значит, $p \in \{1, ..., 9\}$.

1) Если $q = 1$ и $100001=px$. Видим, что при $p=1$ число x не является пятизначным, а остальные значения p не подходят (либо не являются делителями 10000, либо x, либо у не удовлетворяют условию задачи).

2) Если $q = 2$ и $100002=2px$, т.е. $50001=px$. Перебирая возможные значения р, находим, что при $p=3$, $x = 16667$, $y = 33334$, остальные значения p не подходят.

3) Если q равно 4, 5 или 8, то решений нет.

Путем полного перебора обнаружили единственное решение: $x = 16667$, $y = 33334$.

Ответ: $x = 16667$, $y = 33334$.

3. Натуральные числа m и n таковы, что и $m^3 + n$, и $m + m^3$ делится на $m^2 + n^2$. Найдите m и n.

Решение. Так как, каждое из чисел $m^3 + n$ и $m + m^3$ делится на $m^2 + n^2$, то их разность $m - n$ тоже делится на $m^2 + n^2$, т. е. справедливо равенство

$$m - n = x(m^2 + n^2),\ x \in Z.$$

Если $m > n$, то x – натуральное число и справедливы неравенства $m^2 > m$, $n^2 \geq n$, $m^2 + n^2 > m + n$, но тогда $m^2 + n^2 > m - n$ и равенство невозможно.

Если $m < n$, то верно равенство $n - m = y(m^2 + n^2)$, $y \in N$.

Так как для натуральных чисел m и n в этом случае справедливы неравенства $m^2 \geq m$, $n^2 > n$, $m^2 + n^2 > m + n$, то $m^2 + n^2 > n - m$ и равенство невозможно.

Следовательно, остается только возможность $m = n$. Перепишем условие задачи «$m + m^3$ делится на $m^2 + n^2$, т. е. на $2m^2$» в виде $m + m^3 = 2ym^2$, $y \in N$. Разделив последнее равенство на натуральное число m, получим

$1 + m^2 = 2ym$, которое перепишем в виде $(2y - m)m = 1$.

Для натуральных чисел m и $2y - m$ последнее равенство верно лишь при условии $m = 1$ и $y = 1$. Мы получили единственное решение задачи: $m = n = 1$.

Ответ: $m = n = 1$.

4. Решите в целых числах уравнение $m \cdot n^2 = 10^5 n + m$.

Решение. $m \cdot n^2 = 10^5 n + m$, где $m.n \in Z$. Очевидно, что $n=0$, то $m=0$ и нет решений вида $m=0$, $n \neq 0$ или $m \neq 0$, $n=0$.

$m\left(n^2 - 1\right) = 10^5 n$ и $n = \pm 1$ не входит в решение, поэтому $m = \dfrac{10^5 n}{n^2 - 1}$.

Ясно, что замена *m* на *–m* и *n* на *–n* не нарушает равенство, поэтому достаточно найти только натуральные решения данного уравнения.

$m=\dfrac{10^5 n}{(n-1)(n+1)}$. Числа *n* и *n*–1, *n* и *n*+1 взаимно просты, поэтому $m=\dfrac{10^5}{n^2-1}\in Z$ и $n-1=2^k\cdot 5^q$, $n+1=2^k\cdot 5^q+2$, $k,q\in\{0,...,5\}$.

$$\frac{10^5}{2^k\cdot 5^q\left(2^k\cdot 5^q+2\right)}=\frac{2^5\cdot 5^5}{2^k\cdot 5^q\cdot 2\left(2^{k-1}\cdot 5^q+1\right)}=\frac{2^{4-k}\cdot 5^{5-q}}{2^{k-1}\cdot 5^q+1}\in Z.$$

Если $k-1\neq 0$ b $q\neq 0$ число $2^{k-1}\cdot 5^q+1$ не делится ни на 2, ни на 5, поэтому нужные значения надо искать при $k-1=0$ или *q*=0.

1) При $k-1=0$, *k*=1 четное число 5^q+1 – степень числа 2, не больше трех, так как на 5 оно не делится. Подходит только *q*=0.

$n=2^1\cdot 5^0+1=3,\ m=37500.$

2) При *q*=0, $2^{k-1}+1$ либо равно 2, либо – степень числа 5, не большая пятой; а на 2 при $k-1\neq 0$ это число не делится.

$2^{k-1}+1\in\{5,25,125,625,3125\}$. Подходит только число 5. $k-1=2,\ k=3,\ n=2^3\cdot 5^0+1=9,\ m=11250.$

Ответ: *n*=*m*=0 или *n*=3 и *m*=37 500, или *n*=9 и *m*=11 250, или *n*=–3 *m*=–37 500, или *n*=–9 и *m*=–11 250.

5. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида p^2 – 1, где *p* — простое число, большее 3, но меньшее 2010.

Решение. 24, 48, 120 – числа вида p^2 – 1. НОД$(24,48,120)=24$. Докажем, что 24 и есть искомый наибольший общий делитель.

1. p^2 – 1=$(p-1)(p+1)$ – произведение двух соседних четных чисел, следовательно, оно делится на 8 (одно число делится на 2, а другое на 4).

2. Число *p* – простое, поэтому $p=3k+1$ или $p=3k+2$, а значит $p^2-1=9k^2+6k$ или $p^2-1=9k^2+12k+3$, т.е. в любом случае p^2 – 1 делится на 3. Из первого и второго условия следует, что любое число вида p^2 – 1 делится на 24.

Ответ. 24.

6. На координатной прямой отмечены все точки с целыми координатами. Разрешается прыгать на 1 и на 4 вправо или влево. Можно ли за 2010 таких прыжков попасть из точки 1 в точку 2, ни разу не попадая в точки с координатами, кратными 4?

Решение. Точки, соответствующие числам вида $4n$, в которые не разрешается попадать, совершая прыжки, разбивают координатную прямую на интервалы длины 4.

$$-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

Поэтому каждый прыжок на 4 единицы происходит всегда через точку вида $4n$. Так как точки 1 и 2 находятся на одном интервале между соседними точками вида $4n$, то, начав движение из точки 1 и завершив его в точке 2 из одного интервала, мы выполним одинаковое число прыжков на 4 единицы вправо и влево, следовательно, их четное число. Тогда на прыжки на 1 единицу также остается четное число прыжков, так как общее число прыжков 2010 – четное.

Выполняя четное число прыжков на единицу от числа 1 вправо или влево, мы увеличиваем или уменьшаем число 1 на четное число. Понятно, что число 2 при этом получить невозможно.

Ответ: нет.

Задания для самостоятельного решения

7. Решите в натуральных числах уравнение

$$n! + 5n + 13 = k^2, \qquad (1)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

Решение. Предположим, что $n \geq 5$. Тогда $n!$ делится на 2 и 5, а значит десятичная запись числа в левой части равенства (1) оканчивается на 3 или на 8. Но несложный перебор по последней цифре показывает, что квадрат целого числа не может оканчиваться ни на 3, ни на 8.

Наконец, перебирая n от 1 до 4, находим единственное решение: $n = 2$; $k = 5$.

Ответ: $n = 2$; $k = 5$.

8. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$, где $m > n$.

Решение. Так как m и n натурального числа, то для решения задачи требуется решить в натуральных числах уравнение

$$25n + 25m = mn, \text{ где } m > n.$$

Так как при $n = 25$ последнее равенство неверно, то выразим из этого равенства число m:

$$m = \frac{25n}{n-25} = 25 + \frac{625}{n-25}.$$

Теперь очевидно, что m является натуральным числом при $n > 25$ и лишь в случаях:

1) $n - 25 = 1$, 2) $n - 25 = 5$, 3) $n - 25 = 5^2$, 4) $n - 25 = 5^3$ и 5) $n - 25 = 5^4$.

Но при этом условие $m > n$ будет выполнено лишь в случаях:

1) $m = 650$, $n = 26$ и 2) $m = 150$, $n = 30$.

Ответ: $m = 650$, $n = 26$ или $m = 150$, $n = 30$.

9. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенными между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$ найдите такую, знаменатель которой минимален.

Решение. Представим неправильные дроби в виде смешанных чисел: $\frac{96}{35} = 2\frac{25}{36}, \frac{97}{36} = 2\frac{26}{35}$. Отбрасывание целой части не влияет на результат, поэтому решим задачу для дробей $\frac{25}{36}$ и $\frac{26}{35}$.

Пусть искомая дробь $\frac{n-p}{n}, n \in N, 0 < p < n.$ Тогда $\frac{25}{36} < \frac{n-p}{n} < \frac{26}{35}$ или $\begin{cases} \frac{25}{36} < \frac{n-p}{n}, \\ \frac{n-p}{n} < \frac{26}{35}, \end{cases}$ $\begin{cases} n > \frac{36}{11}p, \\ n < \frac{35}{9}p, \end{cases}$ $\frac{36}{11}p < n < \frac{35}{9}p, 3\frac{3}{11}p < n < 3\frac{8}{9}p.$ Будем подбирать p так, чтобы в интервале $\left(3\frac{3}{11}p; 3\frac{8}{9}p\right)$ попало натуральное число. Первое натуральное число, попавшее в такой интервал при переборе p=1,2, … и будет наименьшим.

1. При p=1 интервал $\left(3\frac{3}{11}; 3\frac{8}{9}\right)$ не содержит натуральных чисел.

2. При p=2 число 7 попадает в интервал $\left(6\frac{6}{11}; 7\frac{7}{9}\right)$, n=7, а нужная дробь равна $\frac{n-p}{n} = \frac{5}{7} = \frac{25}{35}$. Искомая дробь равна $2 + \frac{5}{7} = \frac{19}{7}$.

Ответ: $\frac{19}{7}$.

10. Решите в целых числах уравнение $m^4 - 2n^2 = 1$.

Решение. Заметим, что m – нечетное число, и что знаки m и n можно выбирать произвольно, так как если $(m; n)$ – решение уравнения $m^4 - 2n^2 = 1$, то ($-m$; n), (m; $-n$), ($-m$; $-n$) – тоже решения уравнения. Договоримся искать неотрицательные решения. Пусть m=2t+1, тогда

$$\left(m^4-1\right)=(m-1)(m+1)\left(m^2+1\right)=2t(2t+2)\left(4t^2+4t+2\right)=2n^2.$$

Тогда $4t(t+1)\left(2t^2+2t+1\right)=n^2$, получается, что n – четное число. Пусть n=2z, тогда $t(t+1)\left(2t^2+2t+1\right)=z^2$. Числа t, t+1, $2t^2+2t+1=2t(t+1)+1$ попарно взаимно просты, а их произведение – полный квадрат. Отсюда следует, что каждое из них также является полным квадратом. Это возможно только при t=0, иначе t+1 не будет квадратом. Тогда z=0, получаем, что $m=\pm1,\ n=0$.

Ответ: $m=\pm1,\ n=0$.

11. Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на 1. Чему может быть равно это произведение?

Решение. Искомое произведение – четное, поскольку оно делится на каждый простой множитель, уменьшенный на 1. Следовательно, один из простых множителей – четное число.

Последующие множители получим, увеличивая на 1 первый множитель, а затем – произведение множителей, найденных ранее:

2+1=3, 2·3=6 – первое произведение;

6+1=7, 2·3·7=42 – второе произведение;

42+1=43, $2\cdot3\cdot7\cdot43=1806$ – третье произведение;

1806+1=1807.

Поскольку число 1807 составное 1807=139·13, то цепочка множителей завершается числом 43. Итак, произведение, отвечающее условию, может быть равно 6, 42, 1806.

Ответ: 6, 42, 1806.

12. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

Решение 1. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, делится на 11.

Запишем все цифры подряд: 9876543210. В написанном числе указанная разность сумм равна 5. Меняя местами, например, 5 и 8, мы одну сумму увеличиваем на 3, а другую уменьшаем на 3. Значит, разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, становится равной 11. Меняя местами, например, 4 и 7, или 3 и 6, получаем требуемые примеры. Примечание. В задаче не требуется нахождение всех чисел, обладающих указанным свойством.

Ответ: да.

Решение 2. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами цифр, стоящих на четных и нечетных местах делится на 11, т.е. когда эта разность равна: 0, ±11, ±22, …

Сумма 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45, поэтому разность нулю равна быть не может. Пусть эта разность равна ±11, тогда меньшая из сумм равна (45-11):2=17. Подходит, например, такая сумма 0+1+3+6+7=17.

Если указанные цифры стоят на нечетных местах, начиная с первого справа, то чисел с такими цифрами на нечетных местах и цифрами 2, 4, 5, 8, 9 на четных местах можно составить $5!\cdot 5!=120^2=14400$, поэтому ответ – да. Можно предложить и другие комбинации:

17=0+1+4+5+7=0+1+2+8+6.

Ответ: да.

13. При каком наименьшем натуральном n число 2009! не делится на n^n?

Решение. Количество натуральных чисел, не превосходящих 2009 и делящихся на n, равно $\left[\frac{2009}{n}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x. Так как $\left[\frac{2009}{44}\right]=45$, то при всех натуральных n таких, что $n\le 44$, среди чисел 1, 2, …, 2009 чисел, делящихся на n, будет больше, чем n. Поэтому число $2009!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2009$ делится на каждое из чисел n^n при n=1, 2, …, 44.

Теперь рассмотрим n=45. $\left[\frac{2009}{45}\right]=44.$ Поэтому, среди чисел 1, 2, …, 2009 есть 44 числа вида $45k$, учитывая еще, например, произведение чисел 5 и 9, убеждаемся, что 2009! делится на 45^{45}.

Рассуждая аналогично для n=46, получаем, что есть 43 числа вида $46k$. Учитывая, что, например, произведение $8\cdot 23\cdot 69\cdot 115=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 23^3=46^3\cdot 15$, получим, что 2009! делится на 46^{46}.

Далее следует n=47 – простое число, поэтому среди чисел 1, 2, …, 2009 будет только 42 числа, делящихся на 47. Это числа вида $47k$. Самое большое из них – $47\cdot 42=1974$. Поэтому 2009! делится на 47^{42} и не делится на 47^{43}, тем более не делится на 47^{47}.

Итак, 47 – наименьшее натуральное n такое, что число 2009! не делится на n^n. Ответ: 47.