Задания группы В1

Задания группы В1 проверяют вычислительные навыки. Задания составлены на реальных или близких к реальным ситуациях. Для решения задач данной группы достаточно уметь выполнять арифметические действия, делать прикидку и оценку значений выражений, знать понятие процента. Задачи в этом разделе относятся к материалу начальной школы и требуют несложных вычислений. Вычисления можно проводить письменно, а можно и устно. В заданиях этой группы нужно записать только ответ.

1. Таксист за месяц проехал 6000 км. Средний расход бензина на 100 км составил 8 л. Стоимость 1 л бензина 23 р. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

Решение. Таксист проехал 60 раз по 100 км, и истратил 60·8=480 (л) бензина. За этот бензин он заплатил 480·23= 11040 (р.).

Ответ: 11 040 рублей.

2. Сырок стоит 6 р. 70 к. Какое наибольшее число сырков можно купить на 50 рублей?

Решение. Чтобы хватило денег, округлять частное придется *с недостатком*.

50:6,7=500:67=$7\frac{31}{67}\approx 7$. Ответ: 7.

3. В пачке бумаги 500 листов формата А4. За неделю в офисе расходуется 800 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 9 недель?

Решение. За 9 недель расходуется 800·9=7200 (листов). В пачках должно быть не меньше, значит, округляем до целых *с избытком* частное: 7200:500=$14\frac{200}{500}\approx 15$.

Ответ: 15 пачек.

Задачи для самостоятельного решения

4. В летнем лагере 230 детей и 28 воспитателей. В автобус помещается не более 47 пассажиров. Сколько автобусов требуется, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

Решение. $(230+28):47=5\frac{23}{47}\approx 6$. Ответ: 6.

5. Теплоход рассчитан на 750 пассажиров и 25 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 60 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

Решение. Нужно такое количество шлюпок, чтобы в них уместились все пассажиры вместе с командой, и при этом осталось бы менее 60 незанятых мест. Искомое число равно частному от деления числа всех людей, плывущих на теплоходе, на число мест в одной шлюпке, округленному до целых *с избытком*. (750+25):60 = $12\frac{55}{60} \approx 13$. Ответ: 13.

6. Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 0,5 г 3 раза в день в течение 21 дня. В одной упаковке 8 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

Решение. Поскольку массы таблеток одинаковые и больному в день нужно 3 таблетки, достаточно учитывать только количество таблеток. Округляем *с избытком* результат вычисления $21 \cdot 3:8 = 7\frac{7}{8} \approx 8$. Ответ: 8 упаковок.

7. Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 14 г лимонной кислоты. Лимонная кислота продается в пакетиках по 10 г. Какое наименьшее число пачек нужно купить хозяйке для приготовления 6 литров маринада?

Решение. $14 \cdot 6:10 = 8{,}4 \approx 9$. Ответ: 9 пачек.

8. Лена купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 45 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоил 750 рублей, а разовая поездка 19 рублей?

Решение. Экономия Лены равна разности стоимости 45 разовых поездок и проездного билета: $19 \cdot 45 – 750 = 855 – 750 = 105$ (р.). Ответ: 105 рублей.

9. На день рождения принято дарить букет из нечетного числа цветов. Тюльпаны стоят 65 рублей за штуку. У Вани есть 300 рублей. Из какого наибольшего числа тюльпанов он может купить букет Маше на день рождения?

Решение. Нужно найти наибольшее нечетное число тюльпанов, стоимость которых не больше 300 рублей. Этих денег явно не хватит на 5 цветов, а три тюльпана стоят меньше 300 рублей. Ответ: 3 тюльпана.

10. Продолжительность урока в начальной школе 40 мин. Все перемены, кроме большой, длятся 10 мин, а большая перемена между вторым и третьим уроком длится 25 мин. Уроки начинаются в 8 ч 30 мин. Когда заканчивается 4-й урок?

Решение. Можно просто выписать, когда начинается и заканчивается каждый из уроков:

1-й: 8 ч 30 мин – 9 ч 10 мин,

2-й: 9 ч 20 мин – 10 ч 00 мин,

3-й: 10 ч 25 мин – 11 ч 05 мин,

4-й: 11 ч 15 мин – 11 ч 55 мин.

Можно вычислить, сколько времени пройдет от начала первого до конца 4-го урока:

$40 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 25 = 205$ (мин), 205 мин = 3 ч 25 мин.

Прибавим это время ко времени начала первого урока:

8 ч 30 мин + 3 ч 25 мин = 11 ч 55 мин.

Ответ: 11ч 55мин.

11. В супермаркете проходит рекламная акция: покупая две шоколадки, покупатель получает третью шоколадку в подарок. Шоколадка стоит 30 р. Какое наибольшее число шоколадок получит покупатель за 500 рублей?

Решение. До акции на 500 рублей можно было купить $500:30 = 16\frac{20}{30} \approx 16$ (ш.). Во время акций к каждым двум оплаченным дают еще одну, т. е. к 16 добавят 8. Всего получится 16+8=24(ш.). Ответ: 24 шоколадки.

12. В летнем лагере 161 человек. В день на каждого полагается 40 г сахара. Сколько килограммовых пачек сахара понадобится на весь лагерь на 9 дней?

Решение. Для ответа на вопрос задачи нужно вычислить значение выражения

$40 \cdot 161 \cdot 9 : 1000 = 57,960$ (кг)≈ 58 (кг)

Ответ: 58 пачек.

13. Килограмм клубники стоит 90 рублей, мама купила 1 кг 200 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

Решение. Для ответа на вопрос задачи нужно вычислить значение выражения

$500 - 90 \cdot 1{,}2 = 392$ (р.).

Ответ: 392 рубля.

В большинстве задач В1 упоминаются проценты, которые вы изучали в 5 и 6 классах.

По условию задачи некоторая величина увеличивается или уменьшается на несколько процентов. Чтобы найти новое значение этой величины нужно ее старое значение принять за 100% затем найти новое значение этой величины. При этом бывает удобнее от процентов переходить к десятичным дробям. Покажем это на примерах.

14. Цена на электрический чайник была повышена на 16% и составила 3480 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Решение. Старая 100 %-ая цена была повышена на 16%, значит, новая цена составляет 116% от старой, равной x рублей. Поскольку 1% – это 0,01 часть величины, то 116% – это 1,16 старой цены. $x \cdot 1{,}16 = 3480$, $x = 3480 : 1{,}16 = 3000$ (р.) . Ответ: 3000 рублей.

15. В городе N живет 250 000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых 35% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т. п.). Сколько взрослых работает?

Решение. В этой задаче две части, в каждой из которых за 100% принимается своя величина.

1) В городе N взрослых: $100 - 15 = 85$ (%), а именно $250\,000 \cdot 0{,}85 = 212\,500$ (чел.).

2) Работающих взрослых в г. N: $100 - 35 = 65$(%), а именно $212500 \cdot 0{,}65 = 138125$ (чел.).

Ответ: 138125 взрослых работает.

Задачи для самостоятельного решения

16. Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 680 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

Решение. Старая цена составляет 100%, значит 1% равен 8 (рублям).

Новая цена составляет 680:8=85(%). Значит, цена снижена на 100–85=15(%).

Ответ: на 15%.

17. Флакон шампуня стоит 170 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

Решение. Скидка составляет 35% от 170 р., т. е. 170·0,35=59,5 (р.). Новая цена равна 170–59,5=110,5 (р.). Заметим, что от начальных 100% цены после уменьшения на 35% осталось 65%, и новую цену можно было найти как 65% старой: 170·0,65=110,5 (рублей).

Чтобы ответить на вопрос задачи, 900 р. делим на новую цену и округляем *с недостатком* 900:110,5=$8\frac{160}{1105} \approx 8$. Ответ: 8 флаконов.

18. В магазине проходит рекламная акция: тем, кто покупает 4 шоколадки, дают 5-ую шоколадку в подарок. До проведения акции, чтобы купить 20 шоколадок, нужно было иметь не менее 200 рублей. Сколько шоколадок можно получить на 200 рублей во время акции?

Решение. По-видимому, имеется в виду, что 20 шоколадок до проведения акции стоили 200 рублей, т. е. цена одной шоколадки была 10 рублей. Тогда четыре шоколадки стоят 40 рублей, на 200 рублей можно купить 5 таких четверок и получить еще 5 шоколадок. Значит, всего можно получить 20+5=25 (ш.). Ответ: 25 шоколадок.

19. Павел Иванович купил американский автомобиль, на спидометре которого скорость указывается в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 33 мили в час? Ответ округлите до целого числа.

Решение. Нужно перевести 33 мили в километры. 33·1,609≈53 (км). Если нужно писать в ответе наименование единиц, то 53 км/ч. Ответ: 53 км/ч.

20. Шариковая ручка стоит 20 р. Какое наибольшее число таких ручек можно будет купить на 500 р. после повышения цены на 10%?

Решение. Здесь новая цена составляет 110% от старой, т. е. 20·1,10=20·1,1=22(р.).

500:22=$22\frac{16}{22} \approx 22$ (руч.). Ответ: 22 ручки.

21. Клиент взял в банке кредит в размере 3000 руб. на год под 12 %. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько он должен вносить в банк ежемесячно?

Решение. За 100% принимается сумма кредита, т.е. 3000 р. Клиент за 12 месяцев должен внести 112%, т.е. 3000·1,12= 3360 (р.). В месяц ему нужно вносить 3360:12=280 (р.). Ответ: 280 рублей.

22. Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 750 рублей после понижения цены на 10%?

Решение. После понижения цены тетради на 10% она будет стоить 40–40·0,1=36 (р.). Чтобы найти, сколько тетрадей можно купить на 750 р. нужно найти значение выражения 750:36= 20 (ост. 30). Ответ: 20 тетрадей.

23. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 90 рублей за штуку и продает с наценкой 20%. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1100 рублей?

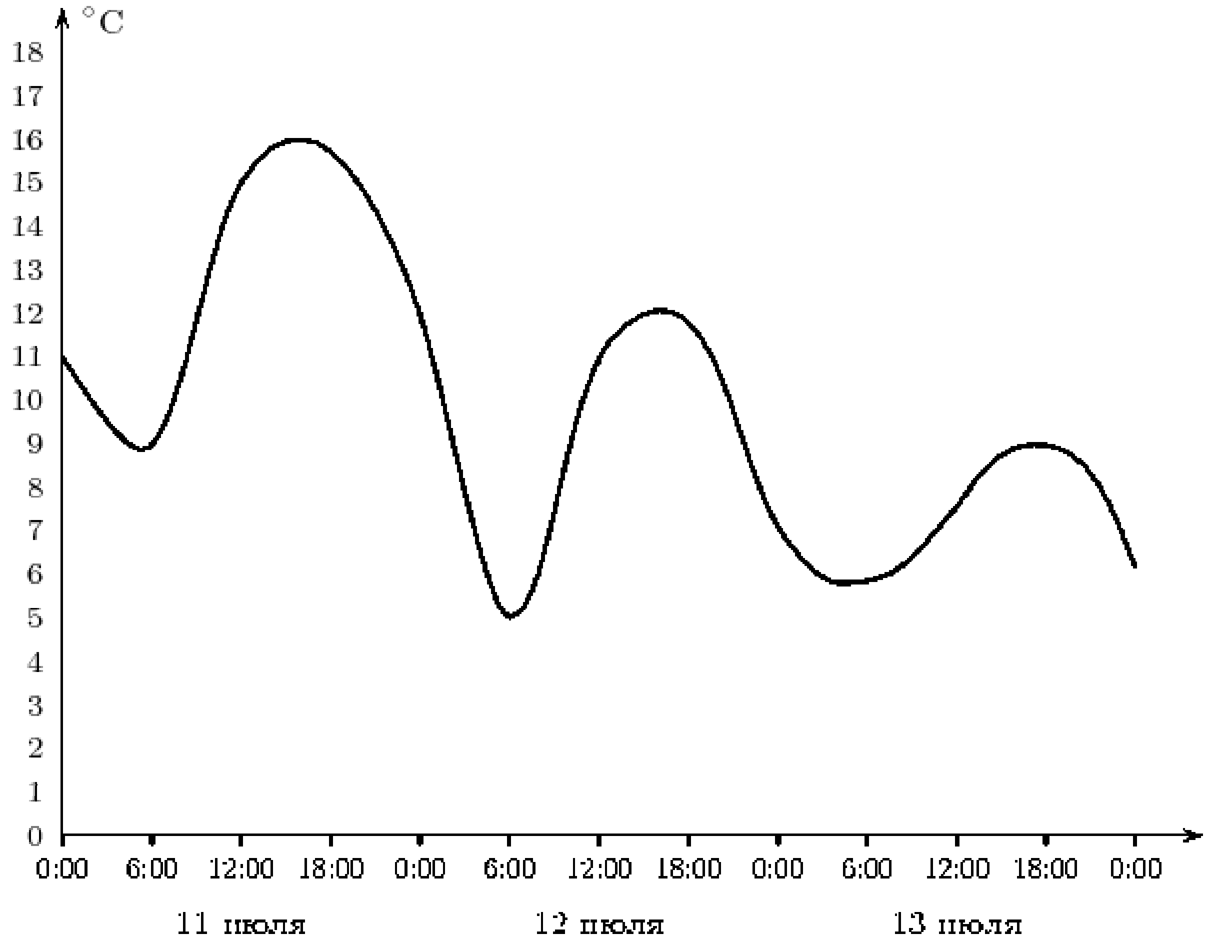
Решение. Оптовая цена цветочного горшка составляет 90 рублей, наценка составляет 20%, т. е. 90·20:100=18 (р.), т.е. магазин продает горшки по цене 90+18=108 (р.). Чтобы узнать, наибольшее число горшков, которое можно купить на 1100 р, нужно 1100:108= 10 (ост. 20).

Ответ: 10 горшков.

Задания группы В2

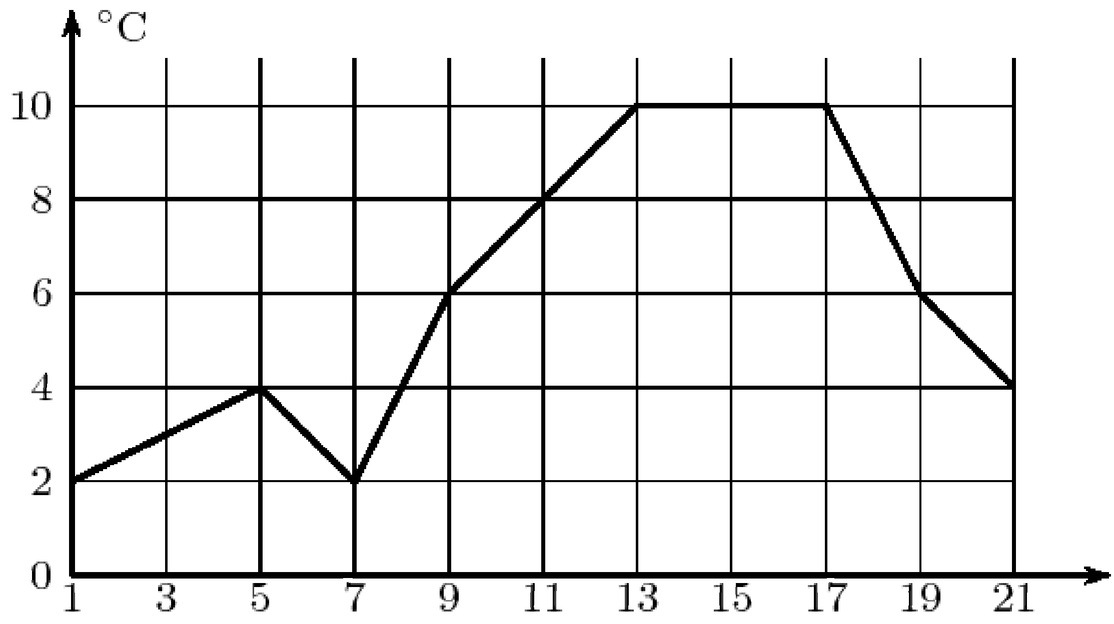
В заданиях типа В2 проверяется умение читать графики функций. Как правило, в заданиях требуется найти наибольшее, наименьшее значение величины или разность между наибольшим и наименьшим значениями величины.

1. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток, начиная с 0 часов 11 июля. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику, до какой наибольшей температуры прогрелся воздух 13 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение. Нужно выделить часть графика, соответствующую 13 июля и указать ординату самой высокой точки этой части. Ответ: 9 °С.

2. Первый посев семян петрушки рекомендуется проводить в апреле при дневной температуре воздуха не менее $+6°$ С. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха в первых трех неделях апреля. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев петрушки.

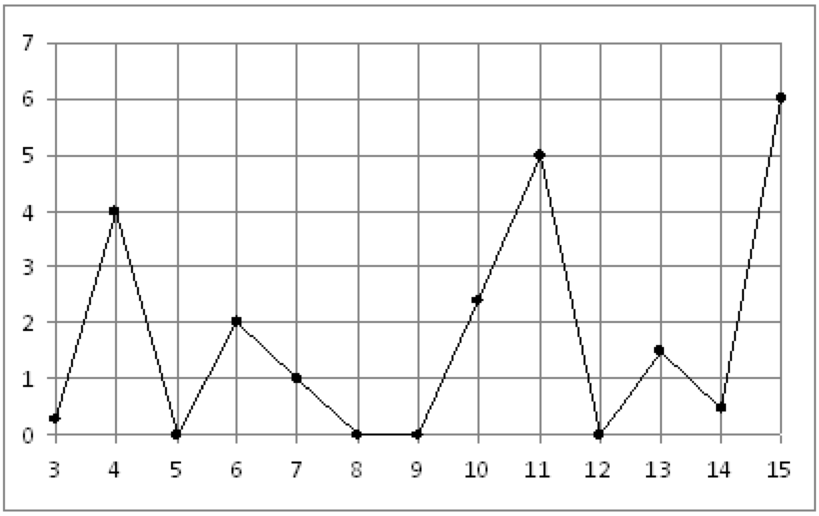


Решение. Нужно выделить часть графика, ординаты точек которой не ниже 6. Абсциссы – числа апреля с 9 по 19. Ответ: 11 дней.

3. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали - температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь 1973 года включительно.

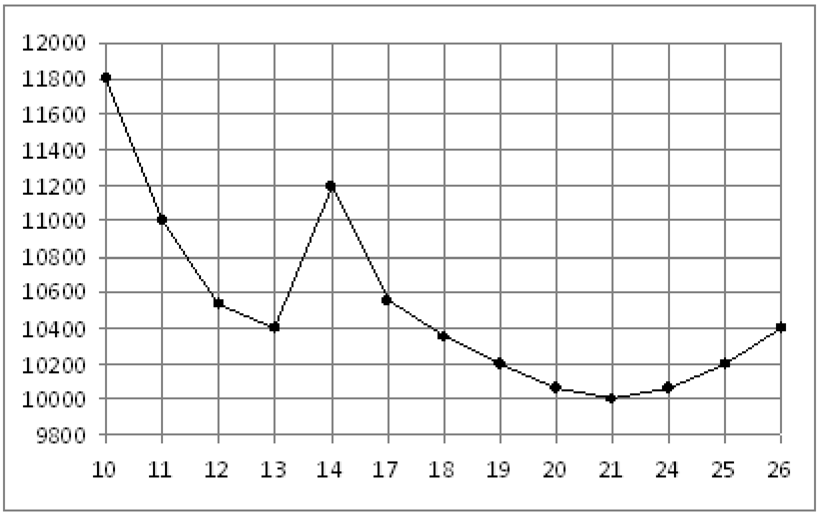
Решение. Главное, не ошибиться с нумерацией месяцев: май – пятый месяц, а декабрь – двенадцатый. Ниже всего температура в декабре – она равна –6 °C. Ответ: –6 °C.

4. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода не выпадало осадков.



Решение. Не следует обращать внимание на линии, соединяющие точки. В задании требуется указать число жирных точек на нулевой отметке – их четыре.

5. На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену никеля на момент закрытия торгов в период с 11 по 21 ноября (в долларах США за тонну).

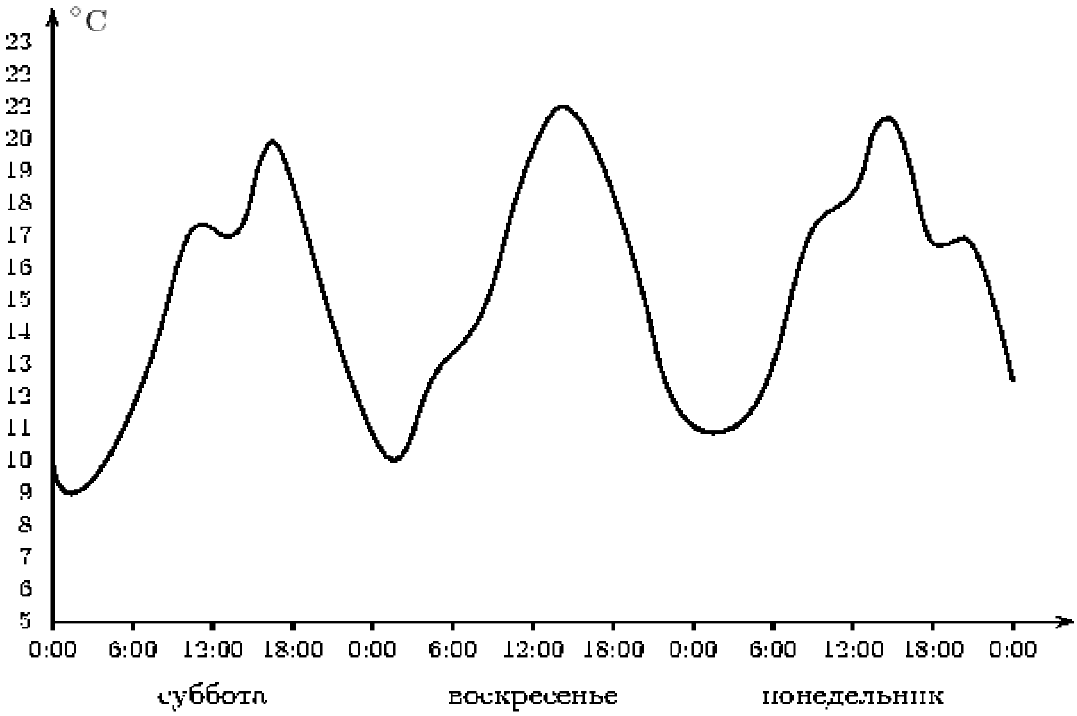


Совет. Нужно указать ординату наиболее высоко расположенной точки, соответствующей промежутку на оси абсцисс с 11 по 21.

Ответ: 11200 долларов США за тонну.

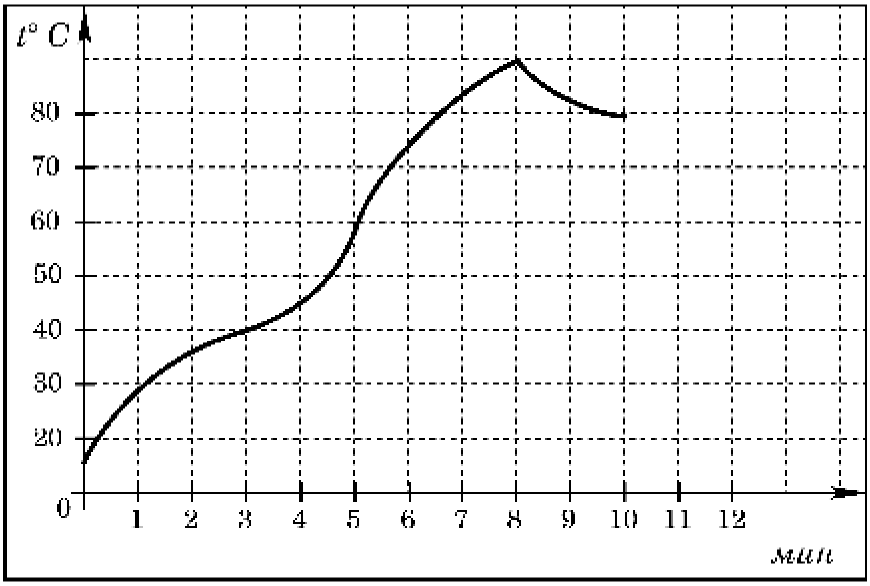
Задачи для самостоятельного решения

6. На графике показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трех суток, начиная с 0 часов субботы. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с субботы на воскресенье. Ответ дайте в градусах Цельсия.



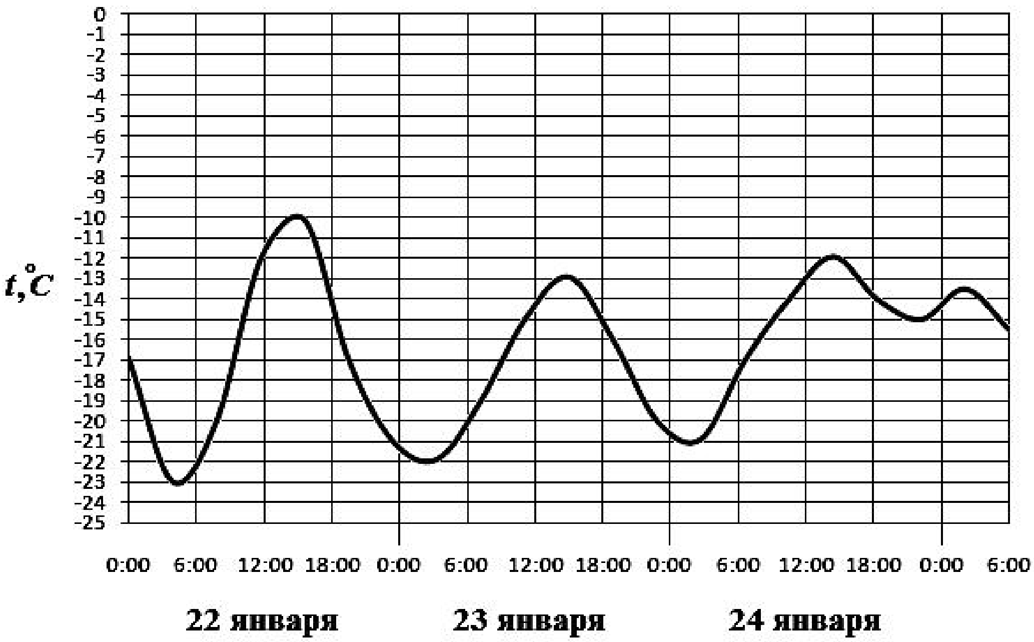
Ответ: 10°C.

7. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля при температуре окружающего воздуха 10° С. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат – температура двигателя в градусах Цельсия. Когда температура достигает определенного значения, включается вентилятор, охлаждающий двигатель, и температура начинает понижаться. Определите по графику, сколько минут прошло от момента запуска двигателя до включения вентилятора?



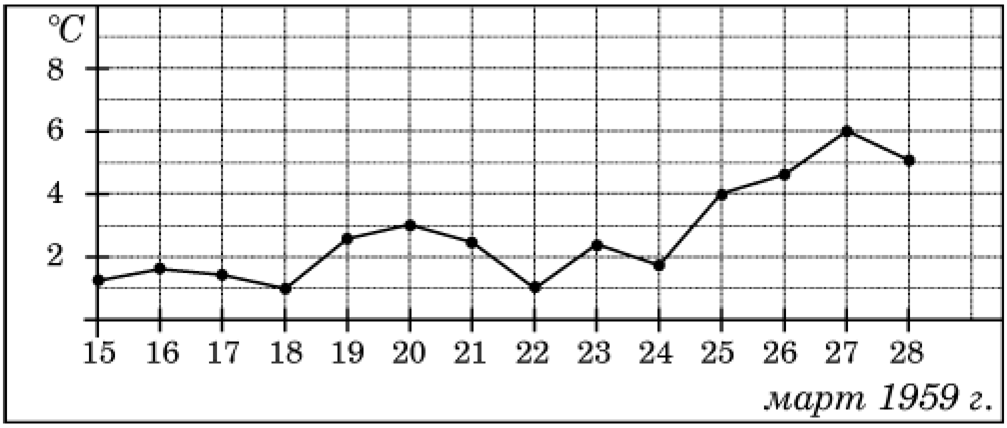
Ответ: 8 мин.

8. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 22 января.



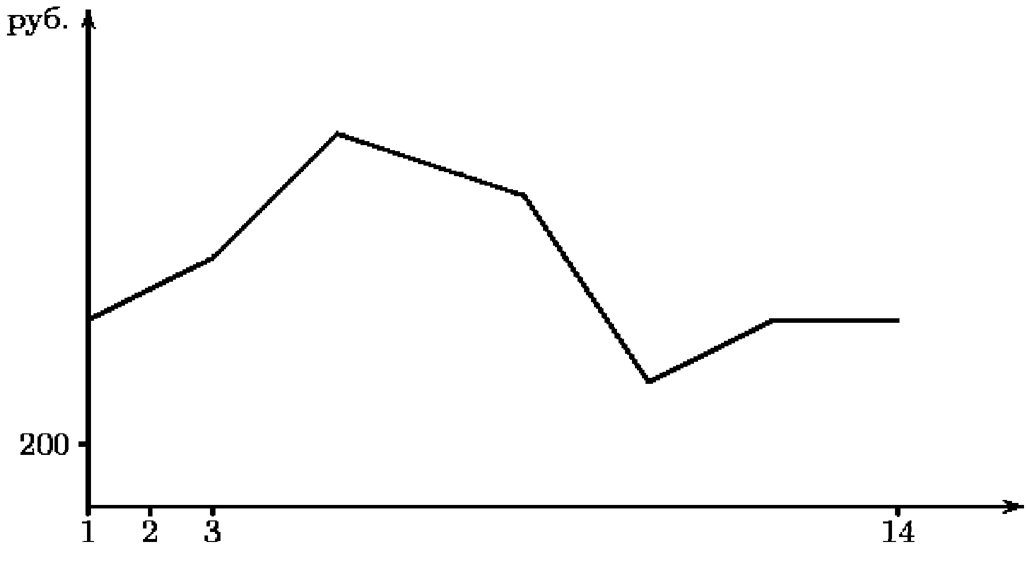
Ответ: $-10^{\circ}C$.

9. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Пскове каждый день с 15 по 28 марта 1959 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали - температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наименьшая среднесуточная температура за указанный период.



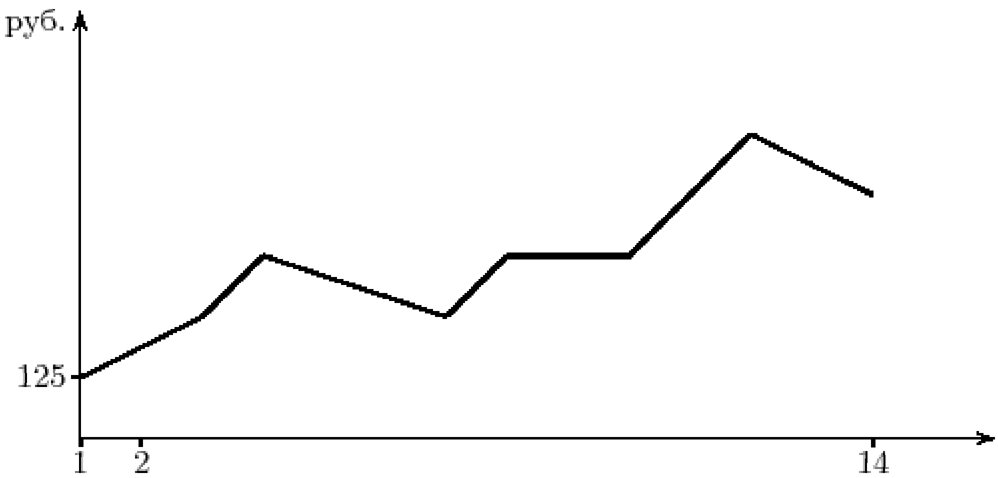
Ответ: 1°C.

10. На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акции нефтедобывающей компании в первые две недели сентября. 3 сентября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 10 сентября, а 12 сентября продал остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



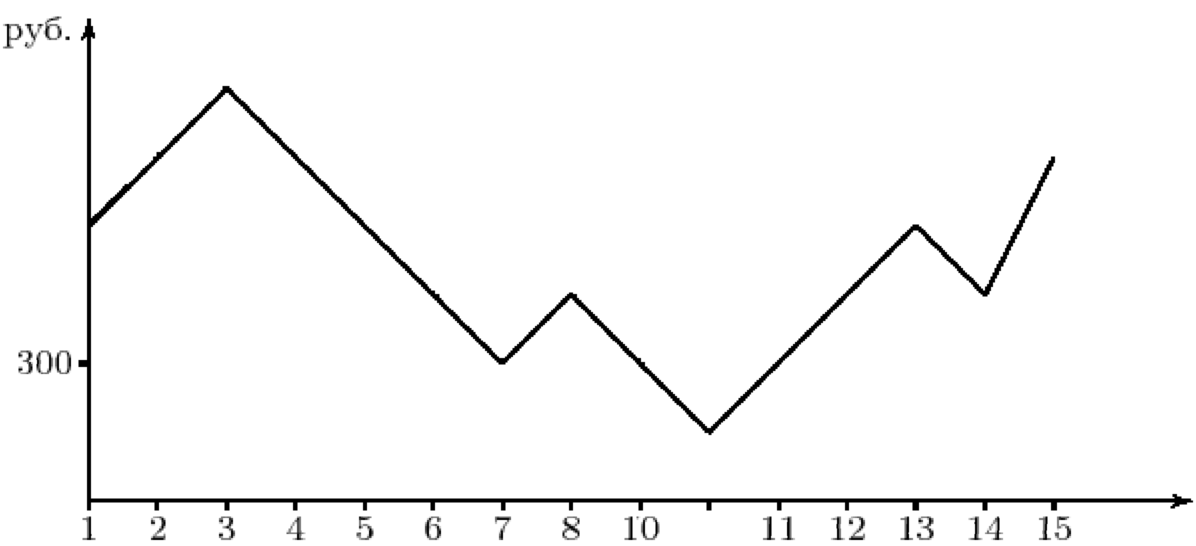
Решение. 3 сентября 1 акция нефтедобывающей компании стоила 800 р., бизнесмен приобрел 10 акций и заплатил 800·10=8000 (р.). 10 сентября 1 акция стоила 400 р., бизнесмен продал 6 акций и получил 400·6=2400 (р.). 12 сентября 1 акция стоила 600 р., за 4 акции бизнесмен получил 600·4=2400 (р.). Всего бизнесмен за 10 акций получил 2400+2400=4800 (р.). 8000–4800=3200 (р.) потерял бизнесмен. Ответ: 3200 рублей.

11. На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели апреля. В первую неделю апреля бизнесмен купил 14 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить?



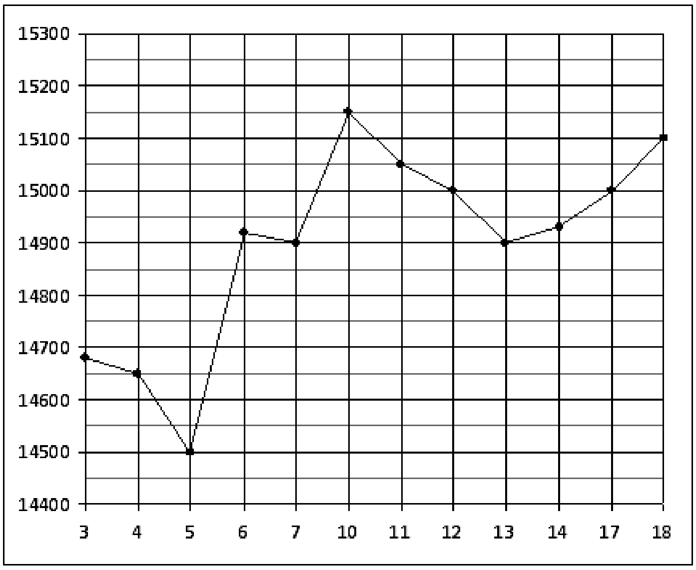
Решение. Для получения наибольшей прибыли бизнесмену нужно было покупать акции в первый день первой недели по цене 125 р. за акцию. При продаже на второй неделе он мог бы получить 625 р. за акцию. Таким образом, на одной акции он получил бы 500 р. прибыли. На 14 акциях его прибыль могла быть равной 500·14=7000 (р.). Ответ: 7000 рублей.

12. На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первой половине сентября. 7 сентября бизнесмен купил пакет акций, а 13 сентября продал его. В результате этих операций прибыль бизнесмена составила 3600 рублей. Сколько акций было в пакете?



Решение. 7 сентября акции покупали по 300 р за штуку, 13 сентября продавали по 600 р. за штуку. Разница в цене одной акции составила 600–300=300 р. Прибыль бизнесмена составила 3600 р. Разделив прибыль на разницу в цене, найдем число акций в пакете: 3600:300=12 (ак.). Ответ: 12 акций.

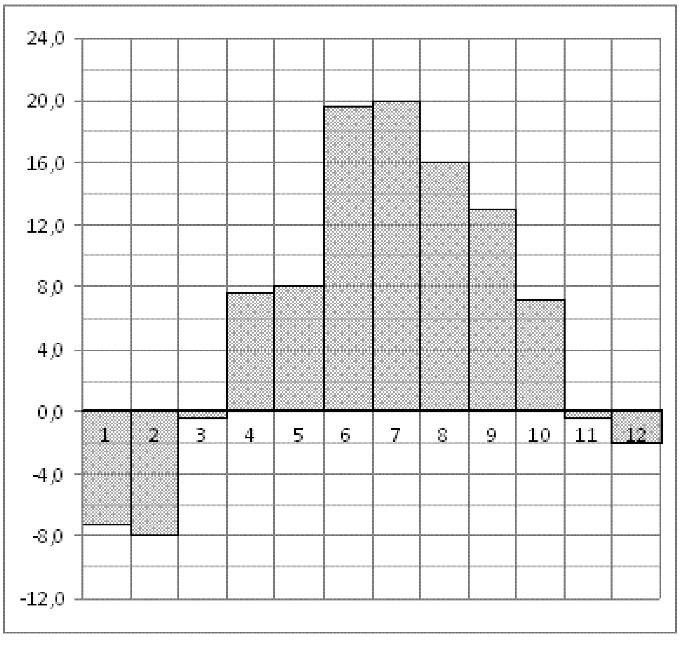
13. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 18 сентября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой олова на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



Решение. Наибольшее значение за указанный период равно 15150 $ за тонну олова, а наименьшее значение – 14500$. Составим разность между наибольшим и наименьшим значениями: 15150–14500=650 ($). Ответ: 650$.

14. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали - температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1999 году.

Ответ: –8 °C



Задания группы В3

В заданиях типа В3 требуется решить несложное показательное, логарифмическое или иррациональное уравнение. Если оно сводится к квадратному, то требуется указать один из корней – больший или меньший. Некоторые уравнения решаются непосредственно по определению степени, логарифма или корня, в других нужно применить простейшие свойства.

1. Найдите корень уравнения $\log_2(4-x)=7.$

Решение. По определению логарифма $4–x = 2^7$. Далее x=4–128, x=–124. Ответ: –124.

2. Найдите корень уравнения $\log_7(9+x)=\log_7 2.$

Решение. Равные значения логарифм принимает при равных значениях аргумента:
9+x=2, x= –7. Ответ: –7.

3. Найдите корень уравнения $\log_4(x+6)=\log_4(5x-14).$

Решение. x+6=5x–14, x=5. Ответ: 5.

4. Найдите корень уравнения $2^{4-2x}=64.$

Решение. Приведем правую часть к основании. 2: $2^{4-2x}=2^6$, Из равенства степеней с одинаковыми основаниями следует равенство показателей: 4–2x=6, x=–1. Ответ: –1.

5. Найдите корень уравнения. $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-13}=\frac{1}{49}.$

Решение. $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-13}=\left(\frac{1}{7}\right)^2,\ x-13=2,\ x=15.$ Ответ: 15.

6. Найдите корень уравнения $\sqrt{55-3x}=7.$

Решение. По определению квадратного корня: 55–3x=49, x=2. Ответ: 2.

7. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{3}{5x-30}}=\frac{1}{5}.$

Решение. $\frac{3}{5x-30}=\frac{1}{25},\ 5x-30=75,\ x=21.$ Ответ: 21.

Задания для самостоятельного решения

8. Найдите корень уравнения $\log_3(9+x)=4$.
9. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2$.
10. Найдите корень уравнения $\log_3(14-x)=\log_3 5$.
11. Найдите корень уравнения $\log_3(6-5x)=2\log_3 5$.
12. Найдите корень уравнения $5^{x-2}=125$.
13. Найдите корень уравнения $6^{4x-10}=\dfrac{1}{36}$.
14. Найдите корень уравнения $\sqrt{6x+57}=9$.
15. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{12}{2x-14}}=\dfrac{1}{10}$.
16. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{7x+41}{17}}=3$.

Решения и ответы

8) $\log_3(9+x)=4, 9+x=3^4,\ x=81-9,\ x=72.$ Ответ: 72.

9) $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2,\ 7-x=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2},\ 7-x=49,\ x=-42.$ Ответ: –42.

10) $\log_3(14-x)=\log_3 5,\ 14-x=5,\ x=9.$ Ответ: 9.

11) $\log_3(6-5x)=2\log_3 5,\ \log_3(6-5x)=\log_3 25,\ 6-5x=25,\ 5x=-19,\ x=-3{,}8.$ Ответ: –3,8.

12) $5^{x-2}=125,\ 5^{x-2}=5^3,\ x-2=3,\ x=5.$ Ответ: 5.

13) $6^{4x-10}=\dfrac{1}{36},\ 6^{4x-10}=6^{-2},\ 4x-10=-2,\ 4x=8, x=2.$ Ответ: 2.

14) $\sqrt{6x+57}=9,\ 6x+57=81,\ 6x=81-57, 6x=24,\ x=4.$ Ответ: 4.

15) $\sqrt{\dfrac{12}{2x-14}}=\dfrac{1}{10},\ \dfrac{12}{2x-14}=\dfrac{1}{100},\ 2x-14=1200,\ 2x=1200+14,\ x=607.$ Ответ: 607.

16) $\sqrt{\dfrac{7x+41}{17}}=3,\ \dfrac{7x+41}{17}=9,\ 7x+41=17\cdot 9,\ 7x=153-41,\ x=16.$ Ответ: 16.

Задания группы В4

В заданиях типа В4 требуется вычислить элементы прямоугольного треугольника, используя определения тригонометрических функций его острых углов. Часть задач решается по готовым чертежам. Для решения задач необходимо знать определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника, основное тригонометрическое тождество и теорему Пифагора.

1. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, $AB = 10$, $AC = 4\sqrt{6}$. Найдите $\sin A$.

Решение. *Косинус острого угла A прямоугольного треугольника ABC равен отношению противолежащего этому углу катета BC к гипотенузе AB, а косинус – равен отношению прилежащего катета AC к гипотенузе AB.*

Косинус можно найти сразу: $\cos A = \dfrac{4\sqrt{6}}{10} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. Из основного тригонометрического тождества (**$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$**) находим синус угла *A*: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\dfrac{24}{25}} = \dfrac{1}{5}$.

Можно сначала по теореме Пифагора найти прилежащий к углу *A* катет: $BC^2 + AC^2 = AB^2, BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{100-96} = 2$. Затем найти синус: $\sin A = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.

Ответ: $\sin A = 0,2$.

2. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, $\cos A = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $BC = 1$. Найдите *AB*.

Решение. Нужно найти гипотенузу, а *BC* – катет, противолежащий углу *A*. По cos*A* найдем синус угла *A*: $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\dfrac{15}{16}} = \dfrac{1}{4}$. Разделив длину противолежащего катета на синус угла, получим гипотенузу $AB = 1 : \dfrac{1}{4} = 4$. Ответ: *AB*=4.

3. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, $AB = 221$, $AC = 85$. Найдите tg*A*.

Решение. Тангенс угла *A* – это отношение противолежащего катета *BC* к прилежащему *AC*.

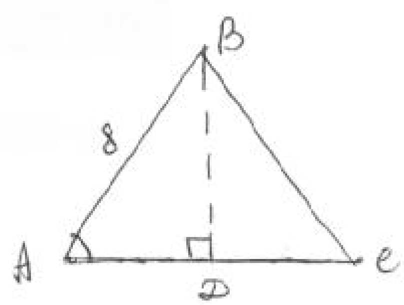
$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{221^2 - 85^2} = \sqrt{(221-85)(221+85)} = \sqrt{136 \cdot 306} = \sqrt{8 \cdot 17 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 17} =$

$=4\cdot3\cdot17$. $tgA = \dfrac{12 \cdot 17}{85} = \dfrac{12}{5} = 2\dfrac{2}{5} = 2,4$.

Можно было сначала найти *cos A*=$\frac{AC}{AB}=\frac{85}{221}=\frac{5}{13}$, а затем по косинусу найти тангенс из формулы $tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.Поскольку угол *A* острый, его тангенс положителен, следовательно, $tgA=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 A}-1}=\sqrt{\frac{169}{25}-1}=\sqrt{\frac{144}{25}}=\frac{12}{5}=2,4.$

Ответ: $tgA=2,4.$

4. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* боковая сторона *AB* равна 8, а $\cos A=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите высоту *BD*, проведенную к основанию.



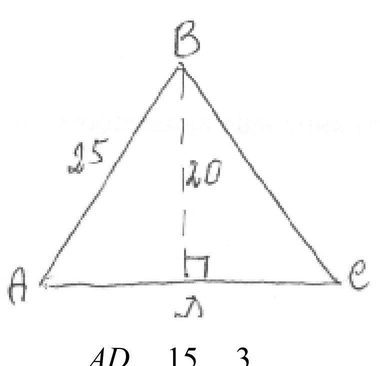
Решение. Полезно сделать ***рисунок.***

Косинус острого угла *A* прямоугольного треугольника *ABD* равен отношению прилежащего к этому углу катета *AD* к гипотенузе *AB*, а синус – равен отношению противолежащего катета *BD* к гипотенузе *AB*. Нам нужно найти противолежащий катет *AD*, а значит, будем использовать синус острого угла А, который равен $\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{16-7}{16}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}.$ Значит, $\frac{BD}{AB}=\frac{3}{4},\ BD=\frac{3}{4}AB=\frac{3}{4}\cdot 8=6.$

Можно было обойтись косинусом: найти прилежащий катет *AD* и воспользоваться теоремой Пифагора. $\frac{AD}{AB}=\cos A,\ AD=AB\cos A=8\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=2\sqrt{7},$

$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{64-28}=\sqrt{36}=6.$ Ответ: 6.

5. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* боковая сторона *AB* равна 25, а высота *BD*, проведенная к основанию, равна 20. Найдите косинус угла $\angle A$.



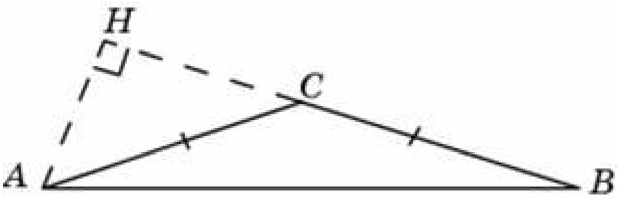
Решение. Можно сразу найти синус угла *A*: $\sin A=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$, а затем косинус:

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}.$$

Но можно сначала найти прилежащий катет по теореме Пифагора $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{25^2-20^2}=\sqrt{225}=15,$ а затем косинус $\cos A=\frac{AD}{AB}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}.$

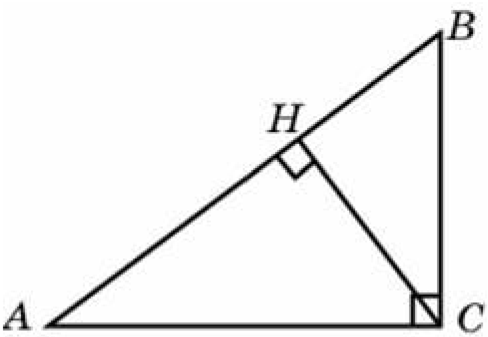
Ответ: 0,6.

6. В треугольнике *ABC* $AC = BC = 2\sqrt{2}$, угол *C* равен 135°. Найдите высоту *AH*.



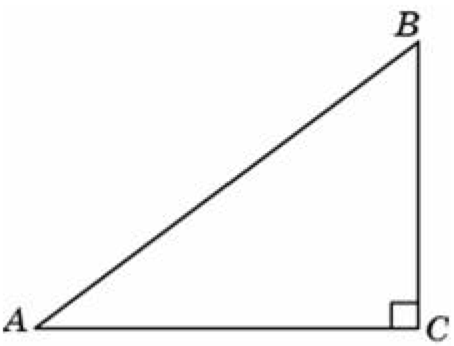
Решение. Внешний угол *C* равен 45°, значит, противолежащий катет *AH* треугольника *AHC* равен $AC\sin C = 2\sqrt{2}\cdot\sin 45° = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$ Ответ: 2.

7. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, $\sin A = \frac{3}{5}$, $BC = 3.$ *CH* — высота. Найдите *BH*.



Решение. В прямоугольном треугольнике *CHB* гипотенуза *CB*, а угол *C* равен углу *A* треугольника *ABC*. $BH = BC\sin C = 3\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{5} = 1,8.$ Ответ: 1,8.

8. В треугольнике *ABC* угол ∠C равен 90°, AB=5, AC=4. Найдите синус внешнего угла при вершине *A*.



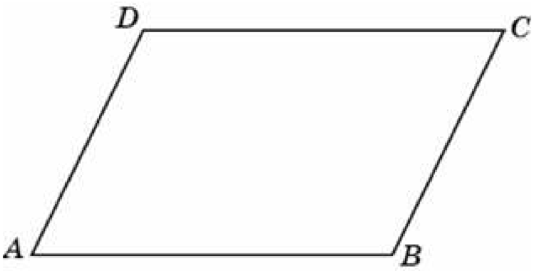
Решение. Синусы внутреннего и внешнего угла равны. Если бы требовалось найти косинус внешнего угла, то он бы от косинуса внутреннего угла отличался только знаком.

Ответ: 0,6.

9. В параллелограмме *ABCD* высота, опущенная на сторону *AB*, равна 3, *AD*=4. Найдите синус угла ∠*B*.

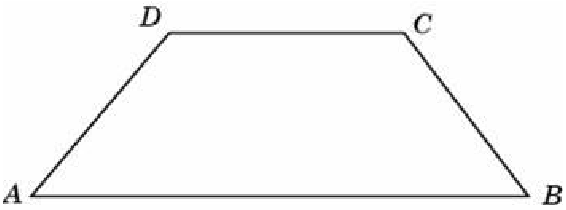
Решение. И здесь синусы углов A и B равны, поскольку в сумме эти углы составляют 180°. Ответ: 0,75.

10. В параллелограмме $ABCD$ $\sin A = 0,8$. Найдите $\cos B$.

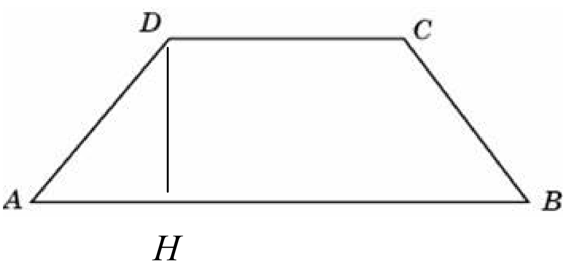


Решение. $\cos B = -\cos A$. Ответ: –0,6.

11. Основания равнобедренной трапеции равны 6 и 12. Боковые стороны равны 5. Найдите синус острого угла трапеции.



Решение. Сделаем стандартное дополнительное построение и нанесем данные на чертеж. В треугольнике AHD прилежащий катет равен 3, а гипотенуза 5, значит, мы имеем дело с египетским треугольником, второй катет которого равен 4. $\sin A = \frac{4}{5}$=0,8. Ответ: 0,8.



Задачи для самостоятельного решения

12. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $BC = 20\sqrt{3}, AB = 40$. Найдите $\sin B$. Ответ:0,5.

13. В треугольнике ABC угол C равен 90^o, $AB = 10$, $BC = \sqrt{51}$. Найдите $\cos A$. Ответ:0,7.

14. В треугольнике ABC угол C равен 90^o, $AB=25$, $BC=7$. Найдите $\cos A$.
Ответ:0,96.

15. В треугольнике ABC угол C равен 90^o, $\sin A=\frac{3}{5}$, $AC=4$. Найдите AB.

Ответ: 5.

16. В треугольнике ABC угол C равен 90^o, $\cos B=\frac{4}{5}$, $AB=20$. Найдите AC.

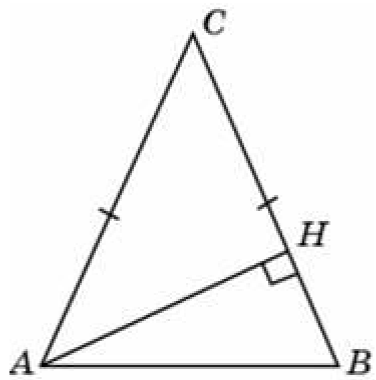
Ответ: 12.

17. В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=32$, $\cos A=\frac{4}{5}$. Найдите высоту CH.

Ответ: 12.

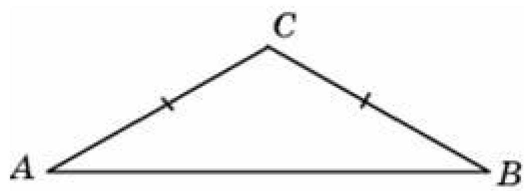
18. В треугольнике ABC $AC=BC=2\sqrt{2}$, угол C равен 45^o. Найдите высоту AH.

Ответ: 2.



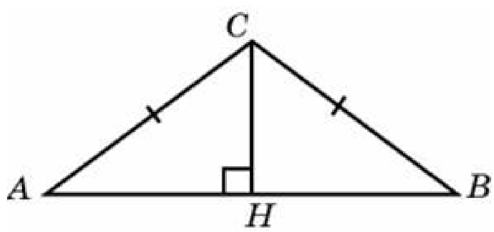
19. В треугольнике ABC $AC=BC$, угол C равен 120^o, $AB=2\sqrt{3}$. Найдите AC.

Ответ: 2.

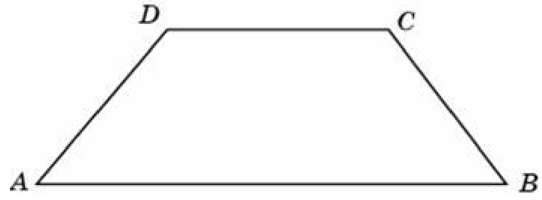


20. В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=8$, $\sin A=\frac{3}{5}$. Найдите высоту CH.

Ответ: 3.



21. Большее основание равнобедренной трапеции равно 12. Боковая сторона равна 5. Синус острого угла равен 0,8. Найдите меньшее основание.
Ответ: 6.



Задания группы В5

Задания группы В5 проверяют умение анализировать практические ситуации. С этой целью предложены текстовые задачи на нахождение оптимального решения с использованием данных, представленных в виде таблиц.

1. Для транспортировки 42 тонн груза на 1100 км можно использовать одного из трех перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъемность автомобилей для каждого перевозчика указана в таблице. Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку груза?

Перевозчик	**Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)**	**Грузоподъемность автомобилей (тонн)**
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	10,5

Решение. Так как стоимость перевозки одним автомобилем для всех перевозчиков определена на одно и тоже расстояние, то достаточно вычислит, сколько автомобилей понадобится и сколько будет стоить перевозка груза на 100 км, а затем выбрать наименьшую стоимость из трех вариантов и умножить на 11, так как 1100 км – это 11 сотен км.

А: 42:3,5= 12 (авт.), 12·3200=38 400 (р.),

Б: 42:5≈9 (авт.) – округляем с избытком. Имеем 9·4100=36 900 (р.)

В: 42:10,5= 4 (авт.). Имеем 4·9500=38 000 (р.).

Самая дешевая перевозка груза будет у перевозчика Б и стоить она будет

36 900·11 =405 900 (р.). Ответ: 405 900 рублей.

2. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	**Абонентская плата**	**Плата за трафик**
1. План "0"	Нет	2,5 руб. за 1 Mb.
2. План "500"	550 р. за 500 Mb трафика в месяц	2 р. за 1 Mb сверх 500 Mb.
3. План "800"	700 р. за 800 Mb трафика в месяц	1,5 р. за 1 Mb сверх 800 Mb.

Пользователь предполагает, что его трафик составит 570 Mb в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 570 Mb?

Решение. Стоимость подключения к сети Интернет

по плану «0»: 570·2,5=1425 (р.)

по плану «500»: 550+70·2=690 (руб.)

по плану «800»: 700 (руб).

Самый дешевый тариф для данного пользователя по плану «500». Ответ: 690 рублей.

3. Для изготовления книжных полок требуется заказать 36 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,25 $м^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	**Цена стекла (руб. за 1 $м^2$)**	**Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)**
А	415	75
Б	430	65
В	465	60

Решение. Требуется 36·0,25=9 ($м^2$) стекла.

Стоимость заказа в

фирме А: 415·9+36·75= 6435 (р.),

фирме Б: 430·9+36·65= 6210 (р.),

фирме В: 465·9+36·60= 6345 (р.).

Самый дешевый заказ будет стоить 6 210 рублей. Ответ: 6 210 рублей.

4. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяженностью 500 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость их аренды. Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант?

Цена дизельного топлива 19 р. за литр, бензина 22 р. за литр, газа 14 р. за литр.

Автомобиль	**Топливо**	**Расход топлива (л на 100 км)**	**Арендная плата (руб. за 1 сутки)**
1.	Дизельное	7	3700
2.	Бензин	10	3200
3.	Газ	14	3200

Решение. Стоимость аренды

автомобиля 1: 500:100·7·19+3700 = 4365 (р.)

автомобиля 2: 500:100·10·22+3200=4300 (р.)

автомобиля 3: 500:100·14·14+3200= 4180 (р.)

Самый дешевый вариант для клиента – автомобиль 3.

Ответ: 4180 рублей.

5. Строительной фирме нужно приобрести 40 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена бруса (руб. за м^3)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	4200	10200	
Б	4800	8200	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	4300	8200	При заказе на сумму больше 200000 руб. доставка бесплатно

Решение. Стоимость покупки с доставкой

у поставщика А: 40·4200+10200= 178 200(р.),

у поставщика Б: 40·4800= 192 000 (р.) доставка бесплатно.

у поставщика В: 40·4300= 172 000 (р.), 172 000+8200=180 200 (р.).

Ответ: 178 200 рублей.

6. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

	1	2	3
1. Автобусом	От дома до автобусной станции — 5 мин	Автобус в пути: 2 ч 20 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком 10 мин.
2. Электричкой	От дома до станции железной дороги — 15 мин.	Электричка в пути: 1 ч 20 мин.	От станции до дачи пешком 55 мин.
3. Маршрутным такси	От дома до остановки маршрутного такси — 10 мин.	Маршрутное такси в дороге 1 ч 15 мин.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 75 минут

Решение.

1. 5 мин + 2 ч 20 мин + 10 мин = 2 ч 35 мин
2. 15 мин + 1 ч 20 мин + 55 мин = 2 ч 30 мин
3. 10 мин +1 ч 15 мин+75 мин = 2 ч 40 мин

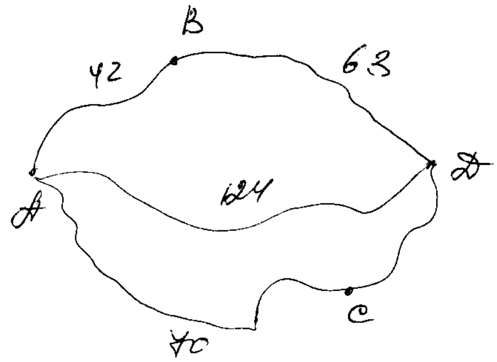
Наименьшее время затрачивается при использовании электрички.

Ответ: 2,5 ч.

7. Семья из трех человек едет из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 660 рублей. Автомобиль расходует 8 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 19,5 руб. за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

Решение. Можно прикинуть устно. На поезде три билета стоят больше 1800 рублей. Бензин для машины 8·19,5·7<8·20·7=1120 (р.). Дешевле ехать на машине 8·19,5·7=1092 (р.). Ответ: 1092 рублей.

8. Из пункта A в пункт D ведут три дороги. Через пункт B в D проехал грузовик со средней скоростью 42 км/ч, через пункт C проехал автобус со средней скоростью 52 км/ч. Третья дорога — без промежуточных пунктов, и по ней проехал легковой автомобиль со средней скоростью 62 км/ч. На рисунке показана схема дорог и расстояние между пунктами по дорогам. Все три автомобиля одновременно выехали из A. Какой автомобиль добрался до D позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.



Решение. Заметим, что проехать со средней скоростью через какой-то пункт невозможно, и в задаче имеется в виду средняя скорость на всем пути из A в D.

Вариант ABD: $\dfrac{42+63}{42}=2\dfrac{21}{42}=2,5\,(\text{ч}).$

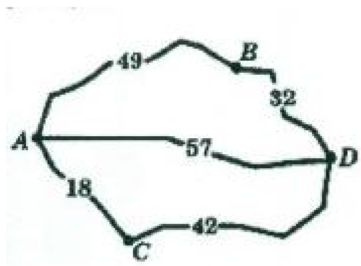
Вариант ACD: $\dfrac{70+47}{52}=2\dfrac{13}{52}=2,25\,(\text{ч}).$

Вариант AD: $\dfrac{124}{62}=2\,(\text{ч}).$

Позже других добрался грузовик по маршруту ABD.
Ответ: 2,5 ч.

Задачи для самостоятельного решения

9. Мотоциклист собирается проехать из пункта A в пункт D, в который ведут три маршрута: через B, через C и прямой маршрут без промежуточных пунктов.



Расстояние в километрах между соседними пунктами показаны на схеме. Известно, что если ехать через B, то средняя скорость будет равна 30 км/ч, если ехать через C – 24 км/ч, а если ехать напрямую, то – 19 км/ч.

Мотоциклист выбрал маршрут так, чтобы доехать до D за наименьшее время. Сколько часов он планирует пробыть в пути?

Решение. Если мотоциклист поедет через В, то расстояние составит 49+32=81 (км), если через С, то расстояние равно 18+42=60 (км), а если прямо, то 57 км. Зная, скорость, найдем время на каждом маршруте. Путь через В займет 81:30=2,7 (ч), через С
60:24=2,5 (ч), прямо 57:19=3(ч). Наименьшее время потребуется, если мотоциклист поедет через пункт С. Ответ: 2,5 часа.

10. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План "700"	600 руб. за 700 Mb трафика в месяц	2,5 руб. за 1 Mb сверх 700 Mb.
2. План "1000"	820 руб. за 1000 Mb трафика в месяц	2 руб. за 1 Mb сверх 1000 Mb.
3. План "Безлимитный"	1100 руб. в месяц	Нет

Пользователь предполагает, что его трафик составит 1150 Mb в месяц и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 1150 Mb?

Решение.

Ответ. 1100 р.

11. Для остекления веранды требуется заказать 28 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,25 м^2. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	300	17	
Б	320	13	
В	340	8	При заказе на сумму свыше 2500 р. резка бесплатно.

Ответ: 2576 р.

12. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
1. Повременный	135 р. в месяц	0,3 р.
2. Комбинированный	255 р. за 450 минут в месяц	0,28 руб. за 1 минуту сверх 450 мин. в месяц.
3. Безлимитный	380 р.	0 р.

Абонент выбрал наиболее дешевый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составляет 700 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 700 минут? Ответ дайте в рублях.

Ответ: 325 р.

13. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
1. Повременный	Нет	0,25 руб.
2. Комбинированный	130 руб. за 320 минут в месяц	Свыше 320 минут в месяц — 0,2 руб. за каждую минуту.
3. Безлимитный	200 руб.	0 руб.

Абонент выбрал наиболее дешевый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров составляет 900 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце действительно будет равна 900 минут? Ответ дайте в рублях.

Ответ: 200 р.

14. От дома до дачи можно доехать на автобусе, на электричке или на маршрутном такси. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

	1	2	3
1. Автобусом	От дома до автобусной станции — 20 мин	Автобус в пути: 2 ч 10 мин.	От остановки автобуса до дачи пешком 5 мин.
2. Электричка	От дома до станции железной дороги — 15 мин.	Электричка в пути: 1 ч 30 мин.	От станции до дачи пешком 45 мин.
3. Маршрутное такси	От дома до остановки маршрутного такси — 15 мин.	Маршрутное такси в дороге 1 ч 5 мин.	От остановки маршрутного такси до дачи пешком 80 минут

Ответ: 2,5 ч

15. Для строительства гаража можно использовать один из двух типов фундамента: бетонный или фундамент из пеноблоков. Для фундамента из пеноблоков необходимо 5 кубометров пеноблоков и 2 мешка цемента. Для бетонного фундамента необходимо 4 тонны щебня и 40 мешков цемента. Кубометр пеноблоков стоит 2250 рублей, щебень стоит 630 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 220 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешевый вариант?

Ответ: 11 320 р.

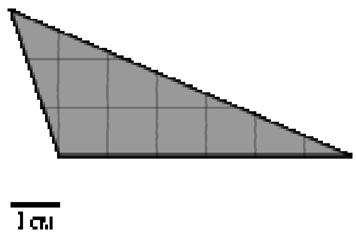
16. При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн природного камня и 9 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 7 тонн щебня и 50 мешков цемента. Тонна камня стоит 1600 рублей, щебень стоит 780 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 230 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешевый вариант?

Ответ: 16470 р

Задания группы В6

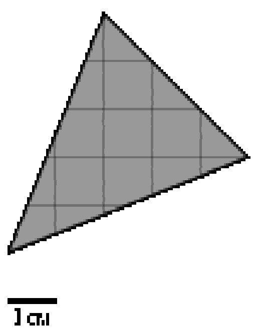
В заданиях типа В6 проверяется умение вычислять площади фигур (треугольника, четырехугольника, круга и его частей), построенных на клетчатой бумаге (сетке) со стороной клетки 1. Площади фигур могут быть найдены по известным формулам. Некоторые задачи можно решить, разбив фигуру на части или заметив, что фигура сама является частью другой фигуры, площадь которой находится легко.

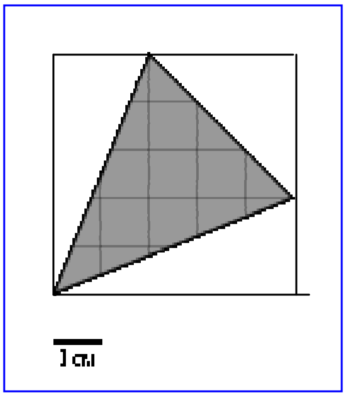
1. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



Решение. Легко, считая клетки, найти, что основание треугольника 6 см, а его высота, проведенная к продолжению основания, равна 3 см. Площадь треугольника находим как половину произведения основания на высоту $S = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ (см^2). Ответ: 9 см^2.

2. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

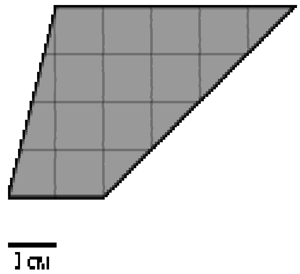




Решение. В этом задании не сосчитаешь по клеткам, чему равны длины сторон треугольника. Опишем вокруг изображенного треугольника прямоугольник (рис.). Его измерения 5 см и 5 см, т.е. прямоугольник оказался квадратом, что, впрочем, совершенно не важно. Его площадь равна 25 см^2. А теперь найдем сумму площадей лишних треугольников, длины оснований и высот которых легко сосчитать: $\frac{5 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{2 \cdot 5}{2} = \frac{29}{2} = 14{,}5$ (см^2). осталось вычесть эту лишнюю площадь из площади прямоугольника: 25–14,5=10,5 (см^2).

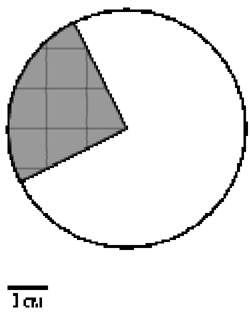
Ответ: 10,5 см^2.

3. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



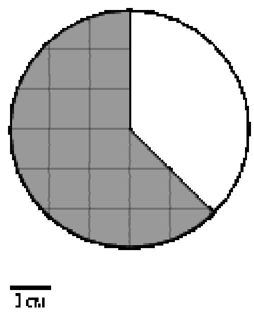
Решение. Легко, считая клетки, найти основания и высоту трапеции и затем ее площадь по формуле $S = \dfrac{a+b}{2}h = \dfrac{2+5}{2} \cdot 4 = 14$ (см^2). Ответ: 14 см^2.

4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах. В ответе запишите $\dfrac{S}{\pi}$.



Решение. Закрашена четверть круга с радиусом R=3 см. По формуле площади круга S=πR^2=9π. Площадь четверти равна $\dfrac{9}{4}\pi$. $\dfrac{9\pi}{4\pi} = \dfrac{9}{4}$. Ответ: 2,25 см^2.

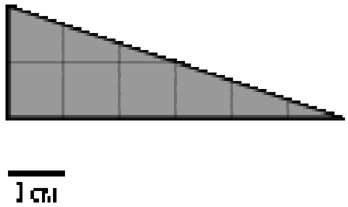
5. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена фигура (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах. В ответе запишите $\dfrac{S}{\pi}$.



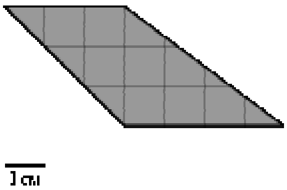
Решение. Здесь нужно найти $\dfrac{5}{8}$ площади круга (половина круга и еще половина от четверти круга). Ответ: 5,625 см^2.

Задания для самостоятельного решения

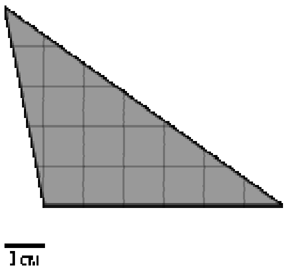
6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.
Ответ: 6 см^2.



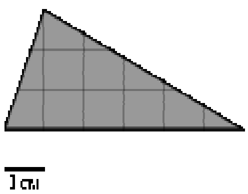
7. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.
Ответ: 10,5 см^2.



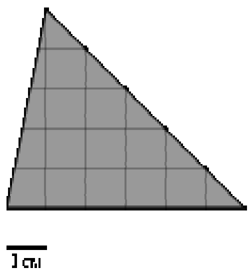
8. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах. Ответ: 15 см^2.



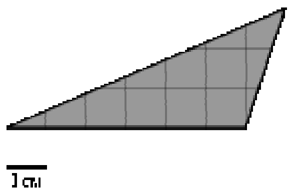
9. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах. Ответ: 9 см^2.



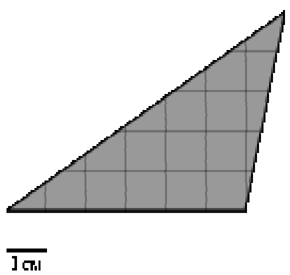
10. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах. Ответ: 15 см^2.



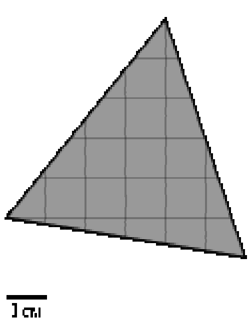
11. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах. Ответ: 9 см^2.



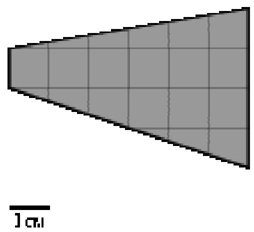
12. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах. Ответ: 15 см^2.



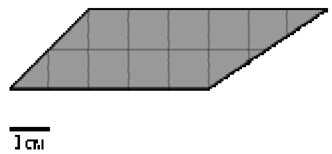
13. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах. Ответ: 17 см^2.



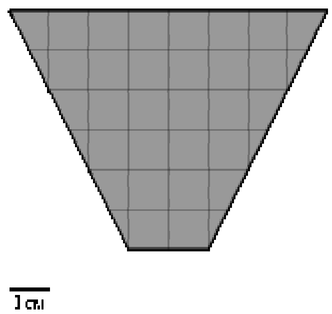
14. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах. Ответ: 15 см^2.



15. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах. Ответ: 11 см^2.



16. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображена трапеция (см. рисунок). Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах. Ответ: 30 см^2.



Задания группы В7

В заданиях типа В7 проверяется умение вычислять значения логарифмических выражений. Для вычислений необходимо знать определения и простейшие свойства логарифмов, степеней и корней:

$$a^{\log_a b} = b,\ \log_a b + \log_a c = \log_a (bc),\ \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c},$$

$$\log_a b^c = c\log_a b,\ \log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b.$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}},\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},\ (a^m)^n = a^{mn}.$$

1. Найдите значение выражения $\log_5 135 - \log_5 5,4$.

Решение. $\log_5 135 - \log_5 5,4 = \log_5 \frac{135}{5,4} = \log_5 \frac{1350}{54} = \log_5 \frac{150}{6} = \log_5 25 = 2$.

Ответ: 2.

2. Найдите значение выражения $16^{\log_4 11}$.

Решение. $16^{\log_4 11} = 4^{2\log_4 11} = 4^{\log_4 11^2} = 11^2 = 121$.

Ответ: 121.

3. Найдите значение выражения $5^{\log_5 2} + 36^{\log_6 \sqrt{19}}$.

Решение. $5^{\log_5 2} + 36^{\log_6 \sqrt{19}} = 2 + 6^{2\log_6 \sqrt{19}} = 2 + 6^{\log_6 (\sqrt{19})^2} = 2 + \left(\sqrt{19}\right)^2 = 2 + 19 = 21$.

Ответ: 21.

4. Найдите значение выражения $\log_3 \log_9 \sqrt[27]{\sqrt[3]{9}}$.

Решение. $\log_3 \log_9 \sqrt[27]{\sqrt[3]{9}} = \log_3 \log_9 \sqrt[81]{9} = \log_3 \left(\frac{1}{81}\log_9 9\right) = \log_3 3^{-4} = -4$.

Ответ: –4.

Задания для самостоятельного решения

5. Найдите значение выражения $6 \cdot 11^{\log_{11} 3}$.

6. Найдите значение выражения $\log_4 104 - \log_4 6,5$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{60}{6^{\log_6 5}}$

8. Найдите значение выражения $36^{\log_6 13}$.

9. Найдите значение выражения $8+\log_3\frac{1}{9}$

10. Найдите значение выражения $\log_4\log_8\sqrt[16]{\sqrt[4]{8}}$.

Решения и ответы

5. $6\cdot 11^{\log_{11}3}$=6·3=18.

6. $\log_4 104-\log_4 6,5=\log_4\frac{104}{6,5}=\log_4 16=2.$

7. $\frac{60}{6^{\log_6 5}}=\frac{60}{5}=12.$

8. $36^{\log_6 13}=6^{2\log_6 13}=6^{\log_6 13^2}=13^2=169.$

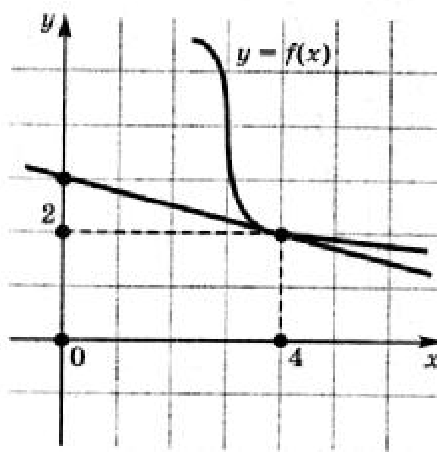
9. $8+\log_3\frac{1}{9}=8+\log_3 3^{-2}=8-2=6.$

10. $\log_4\log_8\sqrt[16]{\sqrt[4]{8}}=\log_4\log_8\sqrt[64]{6}=\log_4\log_8 8^{\frac{1}{64}}=\log_4\frac{1}{64}=\log_4 4^{-3}=-3.$

Задания группы B8

Задания группы B8 требуют умения вычислять производные функций, графики которых изображены на координатной плоскости. На рисунке может быть изображен график функции, а касательная задана описанием. Используется геометрический смысл производной. Значение производной в точке графика с данной абсциссой равно угловому коэффициенту k касательной, проведенной к графику в этой точке. Определив координаты двух точек касательной (следует выбирать узлы координатной сетки, через которые проходит касательная. Как правило, они на рисунках выделены жирно), ее угловой коэффициент (значение производной) можно найти по формуле $k = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

B8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой 4. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 4$.

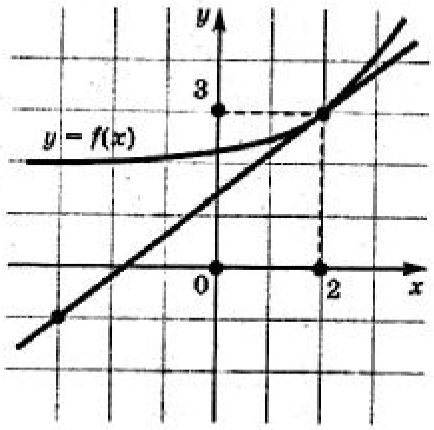


Комментарий. $f'(x) = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$,

$f'(4) = \dfrac{3-2}{0-4} = -\dfrac{1}{4}$. Ответ: –0,25.

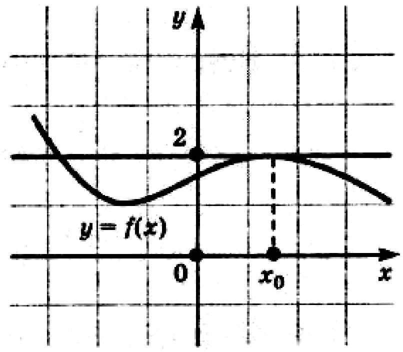
Еще быстрее посчитать по клеточкам. Двигаясь по касательной от левой точки к правой мы опускаемся на 1 (в числитель идет –1) и смещаемся вправо на 4 (в знаменатель идет 4). Получаем $\dfrac{-1}{4} = -0,25$.

B8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой 2. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = 2$.



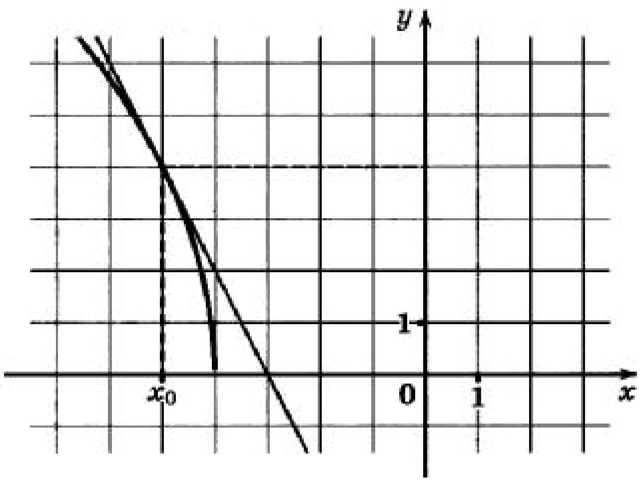
$f'(2) = \dfrac{-1-3}{-3-2} = \dfrac{4}{5}$. Считая клетки получаем те же $\dfrac{4}{5}$. Ответ: 0,8.

B8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Комментарий. Касательная параллельна оси абсцисс, значит, $f'(x_0)=0$, поскольку угловой коэффициент прямой, параллельной оси абсцисс равен нулю.
Ответ: 0.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f'(x)$ в точке x_0.

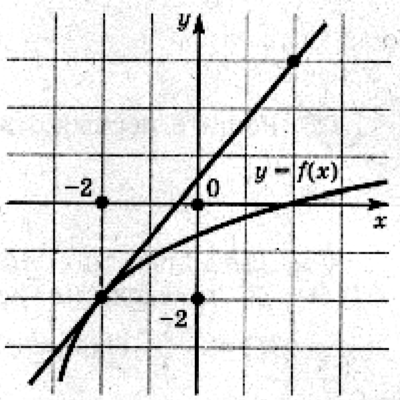


Комментарий. $f'(x_0) = \dfrac{4-0}{-5-(-3)} = -2$. Считая клетки, тоже получаем $\dfrac{-4}{2} = -2$.

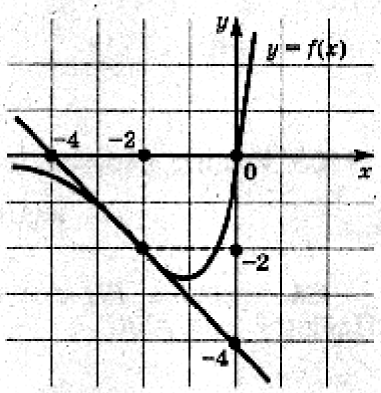
Ответ: –2.

Задания для самостоятельного решения

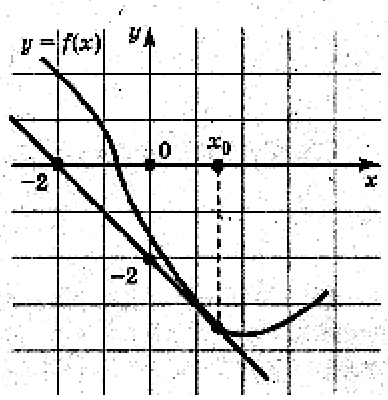
B8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой −2. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = -2$.



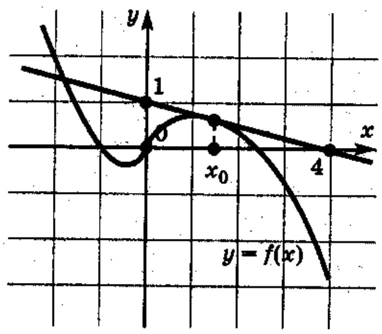
В8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой -2. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = -2$.



В8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



В8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответы и решения

5. $f'(-2) = \dfrac{5}{4} = 1,25.$

6. $f'(-2) = \dfrac{-4}{4} = -1.$

7. $f'(1,5) = \dfrac{-2}{2} = -1.$

8. $f'(1,5) = \dfrac{-1}{4} = -0,25.$

Задания группы B9

Задания типа B9 проверяют умение вычислять площади поверхностей и объемы многогранников и тел вращения. В стереометрических задачах этого раздела не нужно стараться строго обосновывать очевидные особенности конфигурации –обоснования не учитываются, главное – это умение применять основные формулы площадей поверхностей и объемов тел (пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара), в том числе вписанных или описанных около других многогранников и тел вращения.

1. Радиус основания первого конуса в 3 раза больше, чем радиус основания второго конуса, а образующая первого конуса в 2 раза меньше, чем образующая второго. Чему равна площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго равна 18 см^2? Ответ дайте в см^2.

Решение. Площадь боковой поверхности конуса $S=\pi Rl$, где R – радиус основания, а l – образующая конуса. Увеличив радиус в 3 раза, мы увеличим площадь боковой поверхности тоже в 3 раза, а уменьшив образующую в 2 раза, уменьшим площадь боковой поверхности в 2 раза. Одновременное выполнение этих преобразований приведет к увеличению исходной площади в $\frac{3}{2}$ раза: $18\cdot\frac{3}{2}=27$ (см^2). Ответ: 27 см^2.

2. Радиус основания первого конуса в 3 раза меньше, чем радиус основания второго конуса, а образующая первого конуса в 2 раза больше, чем образующая второго. Чему равна площадь боковой поверхности первого конуса, если площадь боковой поверхности второго равна 18 см^2? Ответ дайте в см^2.

Решение. Пусть радиус основания первого конуса равен R, а его образующая l, тогда радиус второго конуса $\frac{R}{3}$, а образующая $2l$. Площадь боковой поверхности второго конуса равна $\pi\cdot\frac{R}{3}\cdot 2l=\frac{2}{3}(\pi Rl)=\frac{2}{3}\cdot 18=12$ (см^2). Ответ: 12 см^2.

3) Высота первой правильной четырехугольной пирамиды в 3 раза меньше, а сторона основания в 2 раза больше, чем у второй правильной четырехугольной пирамиды. Каков объем первой пирамиды, если объем второй равен 18 см^3?

Решение. Пусть высота второй пирамиды h, а сторона основания b. Тогда объем второй пирамиды равен $\frac{1}{3}ha^2$, а объем первой пирамиды $\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{3}\cdot(2a)^2=\frac{4}{9}ha^2=\frac{4}{9}\cdot 18=8$ (см^3).

Ответ: 8 см^3

4. Шар объемом 6 м^3 вписан в цилиндр. Найдите объем цилиндра (в м^3).

Решение. Пусть радиус шара R. Тогда радиус основания цилиндра R, а его высота $2R$.

Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$, а объем цилиндра равен $\pi R^2 \cdot (2R) = 2(\pi R^3)$, т.е. объем цилиндра в 1,5 раза больше объема шара. 6·1,5=9 (см^3). Ответ: 9 см^3.

5. Объем цилиндра равен 1 см^3. Радиус основания уменьшили в 2 раза, а высоту увеличили в 3 раза. Найдите объем получившегося цилиндра.

Решение. Пусть радиус основания исходного цилиндра R, а высота h. Тогда у нового цилиндра радиус основания $\frac{R}{2}$, а высота $3h$. Объем нового цилиндра равен

$\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot (3h) = \frac{3}{4}\pi R^2 h,$ т.е. он составляет $\frac{3}{4}$ объема исходного цилиндра, а именно $\frac{3}{4}$ см^3. Ответ: $\frac{3}{4}$ см^3.

6. Кубик весит 10 г. Сколько граммов будет весить кубик, ребро которого в 3 раза больше, чем ребро первого кубика, если оба кубика изготовлены из одинакового материала?

Решение. Массы кубиков пропорциональны их объемам, а объем второго кубика в 3^3 раз больше, значит масса второго кубика равна $10\cdot 3^3=270$ (г).

Задачи для самостоятельного решения

7. Кубик весит 800 г. Сколько граммов будет весить кубик, ребро которого в 2 раза меньше, чем ребро первого кубика, если оба кубика изготовлены из одинакового материала? Ответ: 100 г.

8. Объем цилиндра равен 24 см^3. Радиус основания цилиндра уменьшили в 2 раза, а образующую увеличили в 5 раз. Найдите объем получившегося цилиндра. Ответ дайте в см^3. Ответ: 30 см^3.

9. Шар объемом 8 м^3 вписан в цилиндр. Найдите объем цилиндра в м^3.

Ответ: 16 м^3.

10. Бильярдный шар весит 360 г. Сколько граммов будет весить шар вдвое меньшего радиуса, сделанный из того же материала?

Ответ: 45 г.

Задания группы В10

В заданиях типа В 10 формулами описываются физические, химические и др. процессы. В большинстве задач нужно подставить указанные значения величин в формулу, составить линейное или квадратное неравенство, найти граничные значения и записать весь промежуток искомых значений. При этом, как правило, совершенно не обязательно разбираться с физическим или коммерческим смыслом описываемых процессов.

1. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тыс. р.) задается формулой: $q = 210 - 15p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. р.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 360 тыс. р.

Решение. Значение $q{\cdot}p$ должно быть больше или равно 360.

$360 \le qp$, $360 \le (210 - 15p) \cdot p$, $15p^2 - 210p + 360 \le 0$, $p^2 - 14p + 24 = 0$,

$p_{1;2} = 7 \pm \sqrt{49 - 24} = 7 \pm 5$, $p_1 = 2$, $p_2 = 12$, $2 \le p \le 12$.

Цена должна быть не меньше 2 тыс. р., но не больше 12 тыс. р.

Ответ: 12 тыс. рублей.

2. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем меняется по закону $H(t) = 1{,}8 - 0{,}96t + 0{,}128t^2$, где t — время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

Решение. Вода будет вытекать, пока ее уровень в баке не станет равен нулю. Значит нужно найти меньший из положительных корней трехчлена $1{,}8 - 0{,}96t + 0{,}128t^2$:

$1{,}8 - 0{,}96t + 0{,}128t^2 = 0$ при $t = 3{,}75$ (мин). Ответ: 3,75 мин.

3. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени работы (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур дается выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 580K$, $a = 20\,K/мин$, $b = -0{,}2$ К/мин. Известно, что при температурах нагревателя свыше 1000 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

Решение. Найдем через сколько минут температура станет равной 1000 К. $1000 = 580 + 20t - 0{,}2t^2$, $t^2 - 100t + 2100 = 0$, меньший положительный корень равен

$50-\sqrt{2500-2100}=50-\sqrt{400}=50-20=30.$ Ответ: через 30 мин.

4. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}\cdot 100\%.$ При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не менее 80%, если температура холодильника T_2=400 К?

Решение. $\eta\le\frac{T_1-T_2}{T_1}\cdot 100,\ T_1\eta\le\left(T_1-T_2\right)\cdot 100,\ T_1(\eta-100)\le -T_2\cdot 100,\ T_1\ge\frac{-100T_2}{\eta-100},$

$T_1\ge\frac{-100\cdot 400}{80-100}=2000(K).$ Ответ: 2000 К.

5. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 90 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление дается формулой $R=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 30 Ом.

Решение. Пусть сопротивление обогревателя R. Тогда должно быть $\frac{90R}{90+R}\ge 30.\ 3R\ge 90+R,\ R\ge 45$ (Ом). Ответ: 45 Ом.

6. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана – Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P=\delta ST^4$, где $\delta=5,7\cdot 10^{-8}$ – числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура – в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S=\frac{1}{16}\cdot 10^{16}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $46,17\cdot 10^{17}$, определите наименьшую возможную температуру этой звезды.

Решение. $5,7\cdot 10^{-8}\cdot\frac{1}{16}\cdot 10^{16}\cdot T^4\ge 46,17\cdot 10^{17},\ T^4\ge\frac{46,17\cdot 10^9\cdot 16}{5,7}=129,6\cdot 10^9=1296\cdot 10^8.$

$T=\sqrt[4]{1296\cdot 10^8}=10^2\sqrt{\sqrt{1296}}=10^2\sqrt{36}=600$ (К). Ответ: 600 К.

7. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик определяет его, измеряя время падения t небольших камушков в колодец и рассчитывая по формуле $h = -5t^2$, где h – уровень воды в м, а t – время падения камушка в с. До дождя время падения камушков составляло 1 с. На какую минимальную высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось не менее, чем на 0,2 с? (Ответ выразите в м.)

Решение. До дождя уровень воды в колодце был равен –5·1 (м), а должен стать
$-5\cdot(1-0{,}2)^2 = -5\cdot 0{,}64 = -3{,}2$ (м). –3,2 – (–5) = 1,8 (м). Ответ: 1,8 м.

8. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на большие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l – линейный размер аппарата (длина ребра куба), $\rho = 1000$ кг/м^3 – плотность воды, а g=9,8 Н/кг – ускорение свободного падения. Каковы могут быть максимальные линейные размеры аппарата (в метрах), чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 2 116 800 Н?

Решение. Здесь тот редкий случай, когда нужно знать (или догадаться), что сила Архимеда – это и есть выталкивающая сила.

$1000\cdot 9{,}8\cdot l^3 \le 2116800,\ l^3 \le 216800:1000:9{,}8 = 216,\ l \le \sqrt[3]{216} = 6$ (м). Ответ: 6 м.

9. В боковой стенке высокого цилиндрического бака вблизи дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0kt} + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t – прошедшее время (в секундах), H_0=20 м – начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{300}$ – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а $g = 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения. К какому моменту времени в баке останется воды не более чем четверть первоначального объема? Ответ выразите в секундах.

Решение. Высота столба воды должна оказаться не больше, чем 5 м, так как первоначальная высота равна 20 м, а останется не более чем четверть.

$20-\sqrt{2\cdot 10\cdot 20}\cdot\frac{t}{300}+5\left(\frac{t}{300}\right)^2\le 5,\ 3-4\cdot\frac{t}{300}+\left(\frac{t}{300}\right)^2\le 0,$ Меньший из корней квадратного трехчлена относительно $\frac{t}{300}$ равен 1, значит, t=300 (с). Ответ: 300 с.

10. Камнеметательная машина выстреливает камни под определенным углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полета камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой $y=ax^2+bx$, где

$a=-\frac{1}{100}$ м$^{-1}$, $b=\frac{7}{10}$ – постоянные параметры, x – расстояние от машины до камня, считаемое по горизонтали, y – высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии от крепостной стены высоты 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над ней на высоте не менее 1 метра?

Решение. Траектория представляет собой параболу y=–0,01x^2+0,7x, ветви которой направлены вниз. Нам нужен больший из корней уравнения 9+1= –0,01x^2+0,7x $x^2-70x+1000=0,\ x=35+\sqrt{1225-1000}=35+15=50$ (м). Ответ: 50 м.

11. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального – массой m=2 кг и радиуса R=15 см, и двух боковых массами по M=1 кг, радиусов $R+h$. При этом момент инерции катушки (в кг·см^2) относительно оси вращения определяется выражением $I=\frac{(m+2M)R^2}{2}+M\left(2Rh+h^2\right)$. При каком максимальном значении h (в см) момент инерции катушки не превышает предельных для нее 625 кг·см^2?

Решение. Подставляем в формулы числовые данные и решаем неравенство

$$\frac{(2+2\cdot 1)\cdot 15^2}{2}+1\cdot(2\cdot 15h+h^2)\le 625,\ h^2+30h-175\le 0.$$

Нужно найти положительный корень квадратного трехчлена $h^2+30h-175$, равный

$-15+\sqrt{225+175}=-15+20=5$. Значение h равно 5 см. Ответ: 5 см.

Задачи для самостоятельного решения

12. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. р.) задается формулой: q=260—20p. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. р.), при котором

значение выручки предприятия за месяц $r=qp$ составит не менее 720 тыс. р. Ответ: 9 тыс. р.

13. При температуре 0 °С рельс имеет длину l_0=10 м. При прокладке путей (предполагается, что рельсы укладывали при 0 °С) между рельсами оставили зазор в 4,5 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t)=l_0\left(1+\alpha t^o\right)$, где $\alpha=1,2\cdot 10^{-5}(^0C)^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t^{o} – температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.) Ответ: 37,5.

14. Операционная прибыль предприятия в краткосрочном периоде вычисляется по формуле: $\pi(q)=q(p-\nu)-f$. Компания продаёт свою продукцию по цене p=500 р. за штуку, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $\nu=200$ р. за штуку, постоянные расходы предприятия f= 900 000 р. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 600 000 руб. в месяц. Ответ: 5000 штук.

15. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t)=-5t^2+18t$ (h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 м. Ответ: 2,4 с.

16. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=1,8+12t-5t^2$ м. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более четырех метров?

Ответ: 2 с.

17. При вращении ведерка с водой на веревке в вертикальной плоскости сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления равна $P=m\left(\frac{\nu^2}{L}-g\right)$, где m – масса воды, v – скорость

движения ведёрка, L – длина веревки, g=10 м/с^2 – ускорение свободного падения. С какой минимальной скоростью надо вращать ведерко, чтобы вода не выливалась из него, если длина верёвки равна 78,4 см? (Ответ выразите в м/с.) Ответ: 2,8 м/с.

18. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $\nu_0 = 54$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 16$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города определяется выражением $S = \nu_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время (в минутах), в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее, чем 80 км от города. Ответ: 75 мин.

19. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 18$ м/с и тормозящий с постоянным ускорением a=–4м/с^2, за t секунд после начала торможения проходит путь $S = \nu_0 t - \frac{at^2}{2}$. Определите (в секундах) наименьшее время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал не менее 36 м. Ответ: 3 с.

Задания группы B11

Задания группы B11 на исследование функций с помощью производной. Часть заданий на вычисление точек экстремума указанной функции с помощью производной, другая часть на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

Наименьшее или наибольшее значение на отрезке находится либо в критической точке, либо в конце отрезка. Практически во всех заданиях в критических точках производная равна нулю. Поэтому сначала находим производную данной функции, приравниваем ее к нулю и находим ее нули на данном отрезке, а затем сравниваем значения функции в найденных точках и на концах отрезка.

Полезно помнить, что, если на данном отрезке функция имеет единственную критическую точку, то минимум в ней является наименьшим, а максимум – наибольшим значением функции на данном отрезке.

1. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=x^3-3x^2-9x+31$ на отрезке $[-1; 4]$.

Решение. Выполняем стандартный план.

$f'(x)=3x^2-6x-9,\ x^2-2x-3=0,\ x_1=-1, x_2=3.$

$f(-1)=36,\ f(3)=4,\ f(4)=64-48-36+31>4.$

Ответ: наименьшее значение равно 4.

2. Найдите наименьшее значение функции $y=11\mathrm{tg}x-11x+16$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Решение. Найдем производную $y'=\frac{11}{\cos^2 x}-11$. Производная положительна во всех точках данного числового отрезка, кроме его левого конца x=0, где она обращается в нуль. Значит, функция на данном отрезке возрастает и ее наименьшее значение при x=0 равно 0–0+16=16. Ответ: 16.

3. Найдите наименьшее значение функции $y=x^2-3x+\ln x+5$ на отрезке $\left[\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right]$.

Решение. $y'=2x-3+\frac{1}{x},\ 2x^2-3x+1=0,\ x_{1;2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm1}{4}, x_1=\frac{1}{2}, x_2=1.$

Проверим, попадают ли найденные критические точки в данный промежуток.

$\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$ (x_1 не принадлежит указанному промежутку),

$\frac{3}{4}<1<\frac{5}{4}$ (x_2 принадлежит указанному промежутку).

На данном промежутке y'<0 слева от 1, а справа y'>0, значит, функция y слева от 1 убывает, а справа возрастает. Наименьшее значение y на данном промежутке при x=1 равно 1–3+0+5=3. Ответ: 3.

4. Найдите наименьшее значение функции $y=(x^2-7x+7)e^{x-5}$ на отрезке $[4;6]$.

Решение. По формуле производной произведения функций $(uv)'=u'v+uv'$ находим производную данной функции

$y'=(2x-7)e^{x-5}+(x^2-7x+7)e^{x-5}=(x^2-5x)e^{x-5}$.

Найдем критические точки: y'=0 при x=0 и x=5. Данному отрезку принадлежит единственная критическая точка x=5. В ней производная меняет знак с минуса на плюс, значит, слева от нее на этом отрезке данная функция убывает, а справа возрастает В самой же точке у нее наименьшее для данного отрезка значение. $(5^2-7\cdot 5+7)e^{5-5}=25-35+7=-3$. Ответ: –3.

5. Найдите наибольшее значение функции y=$\log_3^2(x+5)-4\log_3(x+5)$ на отрезке [–2;4].

Решение. На данном отрезке значение выражения $\log_3(x+5)$ меняется от 1 до 2 включительно, значит, обозначив $\log_3(x+5)$ букой z, мы сведем задачу к нахождению наибольшего значения квадратного трехчлена z^2–4z на отрезке [1; 2]. Ветви соответствующей параболы направлены вверх, а вершина имеет абсциссу, равную 2. Значит, наибольшее значение на отрезке [1; 2] трехчлен принимает при z=1. Оно равно 1–4=–3. Ответ: –3.

Задания для самостоятельного решения

5. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=-x^3+12x-14$ на отрезке $[-2;3]$.

6. Найдите наименьшее значение функции $y=5tgx-5x+6$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

7. Найдите наибольшее значение функции $y=\ln\left(7x\right)-7x+7$ на отрезке $\left[\frac{1}{14};\frac{5}{14}\right]$.

Ответы и решения

5. $f'(x)=-3x^2+12,\ f'(x)=0\ при\ x=\pm 2.$

$f(-2)=8-24-14=-30,\ f(2)=-8+24-14=2,\ f(3)=-27+36-14<0.$

Наибольшее значение на данном отрезке функция принимает при x=2. Оно равно 2.

Ответ: 2.

6. $f'(x)=\dfrac{5}{\cos^2 x}-5=5\left(\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\geq 0$. На данном промежутке функция возрастает, значит свое наименьшее значения на этом промежутке она принимает в его левом конце, т.е. при x=0. $f(0)=6.$ Ответ: 6

7. $f'(x)=\dfrac{1}{x}-7=\dfrac{1-7x}{x},\ f'(x)=0 при\, x=\dfrac{1}{7}.$ Это единственная критическая точка функции на данном отрезке. При переходе через эту точку производная меняет знак с плюс на минус, значит это точка максимума и в ней функция принимает наибольшее для данного промежутка значение $f\left(\dfrac{1}{7}\right)=0-1+7=6.$ Ответ: 6.

Задания группы В12

В заданиях группы В12 проверяется умение учащихся составлять уравнения к текстовым задачам на работу, движение и др. В большинстве текстовых задач полезно обозначать буквой х искомую величину, составить и решить линейное или квадратное уравнение. Описывать процесс составления уравнения не нужно – это никто не оценит, необходимо записать только ответ.

1. Из *A* в *B* одновременно выехали два автомобилиста. Первый весь путь проехал с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 16 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 96 км/ч, в результате чего прибыл в *B* одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 57 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть скорость первого автомобилиста х км/ч. Поскольку речь в задаче идет о половинах пути, весь путь удобно принять за 2. Тогда половина пути 1 и $\frac{2}{x}=\frac{1}{x-16}+\frac{1}{96}$, $2\cdot 96(x-16)=96x+x(x-16)$, $x^2-112x+32\cdot 96=0$,

$x_{1;2}=56\pm\sqrt{56^2-32\cdot 96}=56\pm\sqrt{64}=56\pm 8.$ По условию подходит большее значение скорости, равное 64 км/ч. Ответ: 64 км/ч.

2. Моторная лодка прошла против течения реки 120 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Примем скорость лодки в неподвижной (стоячей) воде за *x* км/ч, тогда ее скорость по течению *x*+1 км/ч, а против течения *x*–1 км/ч.

$$\frac{120}{x-1}-\frac{120}{x+1}=2,\ 120(x+1)-120(x-1)=2(x^2-1),\ 2x^2-2=240,\ x^2=121,\ x=11.$$

Ответ: 11 км/ч – скорость лодки в неподвижной воде.

3. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 315 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 18 км/ч, стоянка длится 6

часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 42 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Скорость течения x км/ч. Скорость теплохода по течению $(18+x)$ км/ч, а против течения $(18-x)$ км/ч. Время, потраченное теплоходом на путь по течению, равно $\frac{315}{18+x}$ ч, время движения против течения $\frac{315}{18-x}$ ч. Зная время, затраченное теплоходом на весь путь, составим уравнение $\frac{315}{18+x}+\frac{315}{18-x}=42–6$. Решите уравнение и найдите ответ.

4. Байдарка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 15 км вниз по течению от A. Пробыв 1 час 20 минут в пункте B, байдарка отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00. Определите (в км/час) собственную скорость байдарки, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

Решение. Легко понять, что плыла байдарка всего $16-10-1\frac{1}{3}=4\frac{2}{3}=\frac{14}{3}$ (ч.)

$$\frac{15}{x+2}+\frac{15}{x-2}=\frac{14}{3},\ 90x=14x^2-56,\ 14x^2-90x-56=0,\ x=\frac{45+\sqrt{45^2+14\cdot 56}}{14}=\frac{45+53}{14}=7\text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 7 км/ч.

В этот же раздел ЕГЭ попали задачи на проценты, в которых, как правило, в рамках одной задачи за 100% принимаются разные величины.

5. Четыре рубашки дешевле куртки на 20%. На сколько процентов шесть рубашек дороже куртки?

Решение. Здесь оба сравнения проводятся с ценой куртки, поэтому на протяжении всей задачи за 100% принимается цена куртки. Нужно найти, сколько процентов от цены куртки составляет цена одной рубашки, затем шести рубашек и из полученного числа вычесть 100% цены куртки.

Цена четырех рубашек составляет 100–20=80 (%) цены куртки, цена одной рубашки 20% цены куртки, а цена шести рубашек 120% цены куртки. Значит, шесть рубашек на 20% дороже куртки. Ответ: на 20%.

6. Брюки дороже рубашки на 20% и дешевле пиджака на 46%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака.

Решение. В задаче сравниваются цены рубашки брюк и пиджака. Обозначим их соответственно буквами *r, b* и *p*. Поскольку цена брюк сравнивается с ценой рубашки, имеем $b = (1+0,20)r$. Цена брюк сравнивается с ценой пиджака $b=(1–0,46)p$. Из полученных равенств имеем $1,2r=0,54p$, $r = \frac{0,54}{1,2}p = 0,45p$. Значит, цена рубашки составляет 45% от цены пиджака, т.е. рубашка на 55% дешевле пиджака. Ответ: на 55%.

7. Объемы ежемесячной добычи газа на первом, втором и третьем месторождениях относятся как 7 : 6 : 14. Планируется уменьшить месячную добычу газа на первом месторождении на 14% и на втором на 14%. На сколько процентов нужно увеличить месячную добычу газа на третьем месторождении, чтобы суммарный объем добываемого за месяц газа не изменился?

Решение. Удобно обозначить объемы добываемого за месяц газа на трех месторождениях за $7x$, $6x$ и $14x$. Тогда на первых двух месторождениях планируют уменьшить добычу газа на $0,14\cdot 7x+0,14\cdot 6x=0,14\cdot 13x$. Этот объем газа составляет искомые p% от добычи газа на третьем месторождении, на которые нужно увеличить добычу, т.е. $\frac{14x}{100}\cdot p$. Получаем уравнение $0,14\cdot 13x=0,14xp$, откуда $p=13$(%). Ответ: на 13%.

8. Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором – на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?

Решение. Здесь как и в большинстве текстовых задач удобно обозначить неизвестное буквой x.

Пусть в первом заповеднике было х волков, тогда во втором было $220–x$ волков. Численность волков в первом заповеднике увеличилась на $0,1x$ особей, а во втором – на $0,2(220–x)$ особей. В сумме увеличение поголовья волков равно $0,1x+0,2(220–x)$, что составляет $250–220= 30$ волков. $44–0,1x=30$, $0,1x=14$, $x=140$ (в.). Ответ: 140 волков.

9. Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора использовали для получения смеси?

Решение. Концентрация раствора – это отношение массы растворенного вещества к массе раствора. Концентрация раствора часто указывается в процентах.

Стандартное решение связано с введением двух неизвестных, например, x кг – масса первого раствора, а y кг – масса второго раствора. Тогда после добавления 2 кг воды получаем $\frac{0,7x+0,6y}{x+y+2}=0,5$, где $0,7x$ – масса растворенного в первом растворе вещества, а $0,6y$ – масса растворенного во втором растворе вещества. Второе уравнение получим из возможности добавления 2 кг 90%-го раствора: $\frac{0,7x+0,6y+0,9\cdot 2}{x+y+2}=0,7.$ Остается составить систему и найти из нее x.

Однако в данной задаче можно заметить, что при втором варианте получается такая же концентрация, какую изначально имел первый раствор, т. е. его можно было бы просто долить в смесь второго раствора и добавки, концентрация которой должна оказаться равной 70%: $\frac{0,6y+0,9\cdot 2}{y+2}=0,7,\ 6y+18=7y+14, y=4.$

Теперь из первого уравнения легко найти x:

$$\frac{0,7x+0,6\cdot 4}{x+4+2}=0,5,\ \ 7x+24=5x+30, x=3\,(\text{кг}).$$

Ответ: 3 кг.

Задачи для самостоятельного решения

10. Велосипедист проехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние до которого равно 120 км. Возвращался в пункт A на следующий день он со скоростью на 2 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 2 часа. В результате на обратный путь он затратил столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x км/ч – скорость велосипедиста из города A в город B, тогда затраченное время равно $\frac{120}{x}$ (ч). На обратном пути скорость составила (x+2) км/ч, а время $\frac{120}{x+2}$ (ч). Составим уравнение $\frac{120}{x}=\frac{120}{x+2}+2$. Ответ: 10 км/ч.

11. Два велосипедиста одновременно отправились в 96-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть скорость первого велосипедиста равна х км/ч, скорость второго – x–4 (км/ч). Время первого велосипедиста $\frac{96}{x}$ (ч), время второго $\frac{96}{x-4}$ (ч). Составим уравнение $\frac{96}{x-4}-\frac{96}{x}$=4, x=12. Ответ: 8 км/ч.

12. Четыре рубашки дороже куртки на 20%. На сколько процентов три рубашки дешевле куртки? Ответ: на 10%.

13. Объемы ежемесячной добычи газа на первом, втором и третьем месторождениях относятся как 7 : 6 : 14. Планируется уменьшить месячную добычу газа на первом месторождении на 14%, а на втором на 7%. На сколько процентов нужно увеличить месячную добычу газа на третьем месторождении, чтобы суммарный объем добываемого за месяц газа не изменился? Ответ: на 10%.

14. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 ч. Через 5 ч после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ? Ответ: за 10 часов.

15. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 255 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 2 часа,

а в пункт отправления теплоход возвращается через 34 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч. Ответ. 16 км/ч.

64. На изготовление 99 деталей первый рабочий затрачивает на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Ответ. 10 деталей.

17. Первая труба пропускает в минуту на 3 литра воды меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 418 литров она заполняет на 3 минуты дольше, чем вторая труба? Ответ: 21 л.

18. Катер в 11:00 вышел из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа 40 минут, катер отправился назад и вернулся в пункт А в 19:00. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость катера равна 12 км/ч. Ответ: 3 км/ч